

THESE

présentée

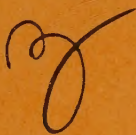
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

Alain **VUEZ**



CONTRIBUTION A L'ETUDE D'ECOULEMENTS PLANS D'INFILTRATION
TABULATION DES RESULTATS CONCERNANT QUELQUES OUVRAGES CLASSIQUES

Soutenue le 18 décembre 1969 devant la Commission d'Examen

Monsieur GUEVEL	Président
Monsieur RAVILLY	
Monsieur THIRRIOT	Examineurs
Monsieur GRUAT	

THESE

présentée

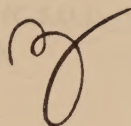
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le **GRADE** de **DOCTEUR-INGENIEUR**

par

Alain VUEZ



CONTRIBUTION A L'ETUDE D'ECOULEMENTS PLANS D'INFILTRATION
TABULATION DES RESULTATS CONCERNANT QUELQUES OUVRAGES CLASSIQUES

Soutenue le 18 décembre 1969 devant la Commission d'Examen

Monsieur GUEVEL	Président
Monsieur RAVILLY	Examineurs
Monsieur THIRRIOT	
Monsieur GRUAT	

THESE

Alain VUEZ



UNIVERSITE DE NANTES

FACULTE DES SCIENCES

Doyen	M. DUNOYER de SEGONZAC	Chimie
Assesseur	M. SELLIER	Zoologie
Professeurs	M. PAUC	Mathématiques
	M. RAVILLY (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. RAFFIN	Mécanique rationnelle
	M. GARRIGUES	Biologie végétale
	M. BRILLOUET	Analyse numérique
	M. GRAFF	Chimie
	M. VIVIER (E.N.S.M.)	Mathématiques appliquées
	M. COLLET	Physique
	M. BOULLLOUD (C.S.U.)	Physique
	Melle DEBRAUX	Botanique
	M. PETRESCO	Mathématiques
	M. PIERI	Biologie animale
	M. WOJTKOWIAK	Chimie
	M. AVIGNON	Physique
	M. MINN	Physique
	M. MOUTON	Physique
	M. TARDY (E.N.S.M.)	Mécanique
Professeurs sans chaire	M. GOBIN (E.N.S.M.)	Chimie
	M. CAVET	Sciences de la Terre
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
	M. MEZENECV (E.N.S.M.)	Physique
	M. MOLINARO	Mathématiques
	M. DUPONT	Biologie végétale
	M. ROUXEL	Chimie
	M. QUINIOU	Chimie
	Melle OFFRET (E.N.S.M.)	Physique
	M. LASKAR	Physique
	M. GOUREAUX	Physique

Maîtres de Conférences

M. FORESTIER
M. SAUDRAY
M. MARTIN
M. LE DOUARIN Georges
M. AMOURIQ
Mlle ASTIE (C.S.U.)
M. LAMEAU (E.N.S.M.)
Mme LE DOUARIN Nicole
M. TOURNOUX
M. GUEVEL (E.N.S.M.)
M. GOUIN (C.S.U.)
M. POINTEAU (E.N.S.M.)
M. SULMONT (E.N.S.M.)
M. BARDON
M. LONCKE
M. LEBRUN
M. JONARD
M. IBISCH Maître de Conférences associé
M. FOUQUES
M. ROSIER
M. LEBORGNE
Mlle LEYCURAS
M. REMY (C.S.U.)
M. LE BIHAN
M. MATZ (C.S.U.)

Sciences de la Terre

Biologie animale
Chimie
Biologie végétale
Psychophysologie
Botanique
Mathématiques
Biologie végétale
Chimie minérale
Mathématiques
Chimie
Chimie
Mathématiques
Physique
Physique
Biologie animale
Biologie végétale
Mathématiques
Physique
Mathématiques
Physique
Chimie
Physique
Biologie

Secrétaire de la Faculté

M. PAILLET

Attaché Principal

the day of the celebration of the 100th anniversary of the birth of the President of the United States, and the day of the 100th anniversary of the birth of the President of the United States, and the day of the 100th anniversary of the birth of the President of the United States.

the day of the celebration of the 100th anniversary of the birth of the President of the United States, and the day of the 100th anniversary of the birth of the President of the United States, and the day of the 100th anniversary of the birth of the President of the United States.

the day of the celebration of the 100th anniversary of the birth of the President of the United States, and the day of the 100th anniversary of the birth of the President of the United States, and the day of the 100th anniversary of the birth of the President of the United States.

A mes parents

INTRODUCTION -

1ère partie - ETUDE DES FONCTIONS ELASTIQUES

Chapitre 1 - FONCTIONS ELASTIQUES -

1.1 - Définitions

1.1.1 - Définitions fondamentales

1.1.2 - Représentation des fonctions élastiques

1.1.3 - Transformations des fonctions élastiques

Chapitre 2 - FONCTIONS VITALES

2.1 - Origine des fonctions vitales

2.1.1 - Développement en série de la fonction $\Phi(u)$

2.1.2 - Fonctions vitales

2.1.3 - Définitions de la fonction $\Phi(u)$

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et tous mes remerciements à Monsieur P. GUEVEL pour les conseils éclairés qu'il a bien voulu me prodiguer, et pour le dévouement avec lequel il a dirigé mes travaux.

J'exprime toute ma gratitude à Messieurs les Professeurs qui ont bien voulu me faire l'honneur de composer le Jury.

Je tiens aussi à remercier mes camarades, en particulier Monsieur D'HERVE, ceux du Centre de Calcul et ceux du Laboratoire de Mécanique des Fluides pour l'aide qu'ils m'ont apportée, ainsi que ceux qui ont contribué à la présentation de ce mémoire.

S O M M A I R E

-:-:-

INTRODUCTION -

1ère partie - ETUDE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Chapitre 1 - FONCTIONS ELLIPTIQUES -

- 1,1 - Définition
- 1,2 - Théorèmes fondamentaux
- 1,3 - Représentation des fonctions elliptiques
- 1,4 - Transformation des fonctions elliptiques

Chapitre 2 - FONCTIONS THETA -

- 2,1 - Origine des fonctions thêta - Définition
- 2,2 - Développements en série de la fonction $H(u)$
- 2,3 - Principales notations
- 2,4 - Définition de la fonction $\theta_1(v/q)$
- 2,5 - Fonctions $\theta_2(v/q), \theta_3(v/q), \theta_4(v/q)$
- 2,6 - Formules de changements d'argument
- 2,7 - Zéros des fonctions thêta
- 2,8 - Développements en produits infinis simples
- 2,9 - Relation $\theta'_1(o) = \pi \theta_2(o) \theta_3(o) \theta_4(o)$
- 2,10 - Détermination de la constante A
- 2,11 - Relations entre les carrés des fonctions thêta
- 2,12 - Formules d'addition des fonctions thêta
- 2,13 - Transformations des fonctions θ
- 2,14 - Equations différentielles satisfaites par les quotients des fonctions thêta
- 2,15 - Développements en série de FOURIER
- 2,16 - Généralisation

Chapitre 3 - FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI -

- 3,1 - Définition des fonctions elliptiques de JACOBI
- 3,2 - Propriétés des fonctions elliptiques de JACOBI
- 3,3 - Relations entre les carrés des fonctions de JACOBI
- 3,4 - Formules d'addition
- 3,5 - Dérivée des fonctions de JACOBI
- 3,6 - Fonction $am(u;k)$
- 3,7 - Cas de dégénérescence
- 3,8 - Transformations des fonctions elliptiques de JACOBI
- 3,9 - Développements en produit et en série
- 3,10 - Décomposition en éléments simples des fonctions elliptiques

Chapitre 4 - INTEGRALES ELLIPTIQUES -

- 4,1 - Intégrales elliptiques sous la forme de LEGENDRE
- 4,2 - Calcul de $F(\phi;k)$ par la méthode de LANDEN
- 4,3 - Intégrales elliptiques complètes
- 4,4 - " " avec la notation de JACOBI
- 4,5 - " " de deuxième espèce
- 4,6 - Fonction $Z(u;k)$
- 4,7 - Transformations des intégrales $F(\phi;k)$ et $E(\phi;k)$
- 4,8 - Intégrales elliptiques de 3ème espèce

FORMULAIRE -

2ème partie - RAPPELS CONCERNANT LES ECOULEMENTS EN MILIEU PERMEABLE -

Chapitre 1 - EQUATIONS GENERALES DES ECOULEMENTS EN MILIEU PERMEABLE -

- 1,1 - Expérience fondamentale - Loi de DARCY
- 1,2 - Equation générale des écoulements rampants
- 1,3 - Généralisation de la loi de DARCY
- 1,4 - Conditions aux limites

Chapitre 2 - PROPRIETES PARTICULIERES DES ECOULEMENTS PLANS -

- 2,1 - Fonction potentiel et fonction de courant
- 2,2 - Coefficient de débit d'un écoulement
- 2,3 - Ecoulements types

3ème partie - ETUDES DE QUELQUES PROBLEMES D'INFILTRATION

Chapitre 1 - PROBLEMES RESOLUS -

Chapitre 2 - DEBIT DE FUITE D'UN CANAL DE SECTION RECTANGULAIRE CREUSE DANS UN MILIEU PERMEABLE -

- 2,1 - Ecoulements transformés
- 2,2 - Expression de la distance du fond du canal
à la couche drainante
- 2,3 - Calcul de la largeur du canal
- 2,4 - Résultats

Chapitre 3 - ECOULEMENT PLAN D'INFILTRATION SOUS UN BARRAGE ETANCHE MUNI D'UN MUR PARAFOUILLE -

- 3,1 - Expression de l'épaisseur du mur parafouille
- 3,2 - " de la profondeur du mur parafouille
- 3,3 - " des longueurs L_1 et L_2
- 3,4 - Coefficient de débit de l'écoulement
- 3,5 - Résultats

Chapitre 4 - ECOULEMENT PLAN A TRAVERS UNE DIGUE EN TERRE MUNIE D'UN TAPIS FILTRANT -

- 4,1 - Résolution du problème par la méthode de l'hodographe
- 4,2 - Exposé de la méthode proposée
- 4,3 - Digue à paroi verticale
- 4,4 - Digue à paroi inclinée
- 4,5 - Résultats
- 4,6 - Formules approchées

ANNEXE -

- 1 - Ecoulement plan sous un rideau de palplanches enfoncées dans un milieu perméable, horizontal, indéfini, présentant un décrochement.
- 2 - Ecoulement plan à travers une digue en terre munie d'un drain de pied.

CONCLUSION -

BIBLIOGRAPHIE -

I N T R O D U C T I O N

-:-:-

Notre recherche a pour but la résolution par voie analytique de quelques problèmes d'écoulement de filtration en milieu poreux.

Les solutions retenues, par la méthode utilisée, ou par les lois de distribution des fonctions de potentiel et des fonctions de courant aux frontières des domaines d'écoulement, font intervenir dans la plupart des cas, des fonctions elliptiques. Il nous a été nécessaire de faire en premier lieu, une étude bibliographique concernant ces fonctions.

Nous avons orienté notre étude du point de vue du calcul numérique des fonctions elliptiques ; nous avons cherché à relever le maximum de propriétés, de développements applicables à des cas les plus divers, et propres à en donner une détermination numérique rapide et précise.

Notre première partie comportera donc :

- une étude sur les fonctions elliptiques, avec rappels de leurs principales propriétés,
- l'introduction des fonctions θ ,
- les fonctions elliptiques de JACOBI ,
- le calcul des intégrales elliptiques
 - d'une part directement à partir de la définition,
 - d'autre part directement à partir des fonctions θ .

Première partie

ETUDE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

CHAPITRE 1

-:-:-

FONCTIONS ELLIPTIQUES

1,1 - DEFINITION -

La plus importante propriété des fonctions trigonométriques $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ est leur périodicité égale à 2π . Si $f(x)$ désigne l'une quelconque de ces fonctions, on a :

$$f(x + 2n\pi) = f(x) \quad (n : \text{entier})$$

On les appelle : fonctions simplement périodiques, par opposition aux fonctions qui vont faire l'objet de l'étude à suivre.

Considérons deux nombres ω_1 et ω_2 dont le rapport ω_1/ω_2 n'est pas purement réel ; les fonctions qui satisfont les équations :

$$f(z + 2\omega_1) = f(z)$$

$$f(z + 2\omega_2) = f(z)$$

pour tout z où $f(z)$ existe, sont appelées fonctions doublement périodiques de z , de périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$.

Par ailleurs, une fonction doublement périodique, qui est analytique, sauf aux pôles, et qui n'a d'autres singularités que des pôles en tout point à distance finie, est appelée "*fonction elliptique*". Nous donnerons donc la définition suivante :

Une fonction elliptique est une fonction méromorphe en tout point à distance finie, doublement périodique, de périodes $2 \omega_1$ et $2 \omega_2$ et dont le rapport n'est pas purement réel.

Du fait de la propriété des fonctions méromorphes : la dérivée d'une fonction méromorphe est aussi une fonction méromorphe.

Etant donnée la double périodicité, les points u ; $u + 2 \omega_1$; $u + 2 \omega_2$; $u + 2 \omega_1 + 2 \omega_2$ du plan complexe forment un parallélogramme appelé parallélogramme des périodes ; on dira qu'un point quelconque :

$$u + 2 m \omega_1 + 2 n \omega_2 \quad (m \text{ et } n \text{ entiers})$$

sera congruent, ou homologue, à un point u .

1,2 - THEOREMES FONDAMENTAUX -

Les théorèmes qui suivent, énoncent des propriétés communes à toutes les fonctions elliptiques. Ils sont d'un grand intérêt pour construire, ou pour établir l'existence d'une fonction elliptique quelconque.

1,2,1 - Toute fonction elliptique a au moins un pôle d'ordre deux ou deux pôles d'ordre un, sinon elle se réduirait à une constante. Elle en a un nombre limité dans un parallélogramme élémentaire.

1,2,2 - Si dans un parallélogramme des périodes, deux fonctions elliptiques de mêmes périodes ont les mêmes zéros et les mêmes pôles avec les mêmes parties principales aux pôles respectifs, elles ne diffèrent que par une constante.

1,2,3 - La somme des résidus aux pôles d'une fonction elliptique $f(z)$ contenus dans un parallélogramme des périodes, est nulle.

1,3 - REPRESENTATION DES FONCTIONS SOUS FORME DE PRODUIT OU DE SOMME -

De même que dans la théorie des fonctions rationnelles, on peut exprimer une fonction elliptique :

- soit sous forme de produits mettant en évidence les valeurs de la variable qui rendent la fonction nulle ou infinie :

$$f(x) = A \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots\dots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots\dots(x-b_m)}$$

- soit sous forme de somme d'éléments simples faisant apparaître la façon dont elle devient infinie.

$$f(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_n x^n + \frac{B_1}{x-b_1} + \dots + \frac{B_n}{x-b_n}$$

1,4 - TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES -

La théorie des transformations des fonctions elliptiques a pour objet d'établir la relation liant deux fonctions ayant deux paires de périodes différentes.

Il est commode de donner à la transformation la représentation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} > 0$$

ω_1 et ω_2 représentent les deux périodes d'une fonction $f_1(z)$

ω_1' et ω_2' représentent les deux périodes d'une fonction $f_2(z)$

On appellera ordre ou degré de la transformation, le degré de y dans le polynôme P , linéaire en x , tel que :

$$P(x, y) = 0$$

avec

$$x = f_1(z)$$

$$y = f_2(z)$$

Le degré de y est aussi le degré de D .

Nous ne considérerons dans ce qui suit que des transformations d'ordre 1, en particulier la transformation de JACOBI dont la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et la transformation d'ordre 2 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

appelée transformation de LANDEN.

C H A P I T R E 2

-:-:-

F O N C T I O N S " T H E T A "

2,1 - ORIGINE DES FONCTIONS THETA

Notation de WEIERSTRASS .

De la même façon que l'on peut exprimer la fonction $\sin(u)$ sous forme d'un développement en produits, mettant en évidence les zéros de cette fonction pour $u = 0 ; \pm \pi ; \pm 2 \pi ; \dots$

$$\sin(u) = u \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{u}{m\pi} \right) e^{\frac{u}{m\pi}} \quad m \neq 0$$

WEIERSTRASS a défini une fonction appelée σ holomorphe en tout point à distance finie et qui admet la valeur zéro pour :

$$u = 2 m \omega_1 + 2 n \omega_2 = \omega \quad \left\{ \begin{array}{l} m = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 \dots \\ n = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 \dots \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \sigma(u) = u \prod' \left(1 - \frac{u}{\omega} \right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{\omega^2}} \quad (\omega \neq 0 \text{ exclu})$$

$\prod'$ désignant la double variation de m et de n sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty [$

On démontre⁽¹⁾ que ce produit infini est absolument convergent. En outre, la fonction $\sigma(u)$ a les propriétés suivantes :

Elle s'annule seulement aux points : $u = 0$, $u = \omega$,

Elle ne devient jamais infinie pour des valeurs finies de u ,

C'est une fonction entière de u ,

C'est une fonction impaire.

WEIERSTRASS a ensuite défini une fonction $\zeta(u)$, en prenant la dérivée logarithmique de $\sigma(u)$:

$$(2) \quad \zeta(u) = \frac{d(\text{Log } \sigma(u))}{du} = \frac{1}{u} + \sum_m \sum_n \left\{ \frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right\}$$

On peut remarquer que la fonction $\zeta(u)$ est analogue à la fonction $\cotg(u)$ dans la théorie des fonctions trigonométriques.

La série :

$$\sum_m \sum_n \left\{ \frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right\}$$

est uniformément et absolument convergente ; on a en effet :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right\} &= \left\{ \frac{u^2}{\omega^2(u-\omega)} \right\} \\ &\leq \frac{|u|^2}{|\omega|^3 \left(1 - \frac{|u|}{|\omega|} \right)} \quad \text{si} \quad |\omega| > |u| \\ &< \frac{2|u|^2}{|\omega|^2} \quad \text{pour tout } m \text{ et } n \text{ tels que} \\ &\quad |\omega| > 2|u| \end{aligned}$$

La fonction $\zeta(u)$ possède les propriétés suivantes :

- elle a pour pôles simples tous les points $u = 0$; $u = \omega$ avec le résidu + 1

(1) APPEL-LACOUR : Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications.

- c'est une fonction impaire.

On peut remarquer qu'elle joue le même rôle que la fonction $1/u$ dans la théorie des fractions rationnelles.

Notation de JACOBI et d'HERMITE .

JACOBI a introduit la fonction $\mathcal{Z}(u)$. Elle est liée à la fonction $\zeta(u)$ de la théorie de WEIERSTRASS par la relation :

$$(3) \quad \mathcal{Z}(u) = \zeta(u) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u$$

Le terme linéaire en u est choisi de telle façon que $\mathcal{Z}(u)$ admette la période $2\omega_1$; η_1 sera donc une constante telle que :

$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta(u) + 2\eta_1$$

Si on appelle η_2 la constante telle que :

$$\zeta(u + 2\omega_2) = \zeta(u) + 2\eta_2 ,$$

la fonction $\mathcal{Z}(u)$ satisfait aux deux relations

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{Z}(u + 2\omega_1) = \mathcal{Z}(u) \\ \mathcal{Z}(u + 2\omega_2) = \mathcal{Z}(u) - 2\frac{\delta}{\omega_1} \end{cases}$$

où δ est une constante égale à :

$$\delta = \eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1$$

En faisant $u = -\omega_1$ et $u = -\omega_2$ et en remarquant que ζ est impaire, on peut écrire que :

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1) \quad \eta_2 = \zeta(\omega_2)$$

La fonction $\sigma(u)$ de WEIERSTRASS est alors remplacée par la fonction $H(u)$ (lire éta de u) dont la dérivée logarithmique est la fonction $\mathcal{Z}(u)$:

$$(5) \quad \frac{H'(u)}{H(u)} = Z(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \frac{\eta_1}{\omega_1} u$$

$$H(u) = e^{\rho} e^{-\frac{\eta_1}{\omega_1} u^2} \sigma(u)$$

où ρ est une constante d'intégration. Pour la déterminer, on divise les deux membres de l'égalité précédente par u et on fait tendre u vers zéro.

$$\frac{\sigma(u)}{u} \rightarrow 1, \quad \frac{H(u)}{u} \rightarrow \frac{dH(u)}{du} \quad (u = 0)$$

et $\rho = H'(0)$

La fonction H admet les mêmes zéros que $\sigma(u)$ et vérifie les deux relations:

$$(6) \quad \begin{cases} H(u + 2\omega_1) = -H(u) \\ H(u + 2\omega_2) = -e^{-\frac{2\eta_1}{\omega_1}(u + \omega_2)} H(u) \end{cases}$$

2,2 - DEVELOPPEMENTS EN SERIE

Expression trigonométrique de la fonction $Z(u)$

Nous poserons dans ce qui suit :

$$q = e^{i\pi\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

en remarquant que l'on peut toujours prendre le signe de ω_1 et de ω_2 de telle sorte que le coefficient de i du rapport ω_1/ω_2 soit de signe +.

Considérons les deux séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2\omega_1} \left\{ \cotg \frac{\pi}{2\omega_1} (u - 2n\omega_2) - i \right\}$$

$$\sum_{n=1}^{-\infty} \frac{\pi}{2\omega_1} \left\{ \cotg \frac{\pi}{2\omega_1} (u - 2n\omega_2) + i \right\}$$

Elles sont absolument et uniformément convergentes pour $|q| \leq q_1$ (q_1 est un nombre positif inférieur à 1) et pour $\left|\frac{u}{\omega}\right|$ borné.

Chaque terme des deux séries a pour pôles simples, de résidus + 1, tous les points :

$$u = 2 m \omega_1 + 2 \omega_2 \quad (m = 0 ; \pm 2 \dots)$$

La fonction $\Phi(u)$ définie par :

$$(7) \quad \Phi(u) = \frac{\pi}{2\omega_1} \cotg \frac{\pi u}{2\omega_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2\omega_1} \left\{ \cotg \frac{\pi}{2\omega_1} (u - 2n\omega_2) - i \right\} \\ + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{\pi}{2\omega_1} \left\{ \cotg \frac{\pi}{2\omega_1} (u - 2n\omega_2) + i \right\}$$

- admet les mêmes pôles et les mêmes résidus que $\mathcal{Z}(u)$
- vérifie la relation

$$(8) \quad \Phi(u + 2\omega_2) = \Phi(u) - \frac{\pi}{\omega_1} i$$

On peut donc conclure, d'après le théorème (1,2,2) que les fonctions $\Phi(u)$ et $\mathcal{Z}(u)$ ne diffèrent que par une constante.

De plus, elles sont toutes les deux impaires : la constante qui les diffère est nulle, et on peut affirmer que les deux fonctions $\Phi(u)$ et $\mathcal{Z}(u)$ sont identiques.

En outre, des deux relations (4) et (8) on ⁽¹⁾ peut déduire le coefficient δ , soit :

$$\delta = i \frac{\pi}{2}$$

Expression trigonométrique de la fonction $H(u)$

La fonction $H(u)$ a déjà été définie dans le paragraphe (2,1) comme étant une fonction dont la dérivée logarithmique est $\mathcal{Z}(u)$

$$\frac{H'(u)}{H(u)} \equiv \mathcal{Z}(u)$$

L'intégration du développement trigonométrique de la fonction $\mathcal{Z}(u)$ donné au paragraphe précédent, va nous donner une expression très intéressante de la fonction $H(u)$.

(1) APPEL et LACOUR : Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. § 73.

Considérons un terme quelconque de l'une des sommes de l'expression (7) :

$$\frac{\pi}{2\omega_1} \left\{ \cotg \frac{\pi}{2\omega_1} (\mu + 2n\omega_2) \pm i \right\}$$

L'intégration entre 0 et μ donne le résultat suivant :

$$\text{Log}_n \frac{\sin \frac{\pi}{2\omega_1} (\mu + 2n\omega_2)}{\sin n\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} \pm i \pi \frac{\mu}{2\omega_1}$$

En prenant les exponentielles et en multipliant numérateur et dénominateur par :

$$e^{n i \pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} = q^n$$

chaque terme s'écrit :

$$\frac{1 - q^{2n} e^{\pm i \pi \frac{\mu}{\omega_1}}}{1 - q^{2n}}$$

La fonction $H(\mu)$ s'obtient alors en faisant le produit des termes calculés plus haut.

$$(9) \quad H(\mu) = C \sin \frac{\pi \mu}{2\omega_1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n} e^{i \pi \frac{\mu}{\omega_1}} \right) \left(1 - q^{2n} e^{-i \pi \frac{\mu}{\omega_1}} \right)$$

expression qui vérifie bien l'identité de départ :

$$\mathcal{Z}(\mu) \equiv \frac{d}{d\mu} \left\{ \text{Log } H(\mu) \right\}$$

En effectuant les produits tels que : $\left(1 - q^{2n} e^{i \pi \frac{\mu}{\omega_1}} \right) \left(1 - q^{2n} e^{-i \pi \frac{\mu}{\omega_1}} \right)$

$H(\mu)$ s'écrit encore :

$$(10) \quad H(\mu) = C \sin \frac{\pi \mu}{2\omega_1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - 2q^{2n} \cos \pi \frac{\mu}{\omega_1} + q^{4n} \right)$$

On peut remarquer que la fonction $H(\mu)$ est simplement périodique, que le produit infini est :

. absolument convergent pour $|q| < 1$

. uniformément convergent pour $\left| \frac{\mu}{\omega_1} \right|$ borné et $|q| \leq q_1 < 1$

Développement de $H(u)$ en série trigonométrique

Il est obtenu à partir du développement de l'expression (10), en ordonnant suivant les puissances croissantes de $\cos \pi \frac{u}{\omega_1}$, et en remplaçant chaque terme de la forme :

$$\sin \pi \frac{u}{2\omega_1} \cdot \cos n \pi \frac{u}{\omega_1}$$

par une différence de sinus. Il vient ainsi :

$$(11) \quad H(u) = a_0 \sin \pi \frac{u}{2\omega_1} + a_1 \sin 3\pi \frac{u}{2\omega_1} + \dots + a_n \sin (2n+1) \pi \frac{u}{2\omega_1} + \dots$$

Après avoir remplacé les sinus par des exponentielles, on obtient :

$$(12) \quad H(u) = A_0 e^{i\pi \frac{u}{2\omega_1}} + A_1 e^{3i\pi \frac{u}{2\omega_1}} + \dots + A_n e^{(2n+1)i\pi \frac{u}{2\omega_1}} + \dots \\ - A_0 e^{-i\pi \frac{u}{2\omega_1}} - \dots - A_n e^{-(2n+1)i\pi \frac{u}{2\omega_1}} - \dots$$

Les coefficients A_n sont déterminés par identification des deux membres de la relation (6) que l'on peut écrire, compte tenu des égalités :

$$\delta = +i\pi/2 \quad q = e^{i\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} \\ H(u + 2\omega_2) = -\frac{1}{q} e^{-i\pi \frac{u}{\omega_1}} H(u)$$

Remplaçons $H(u + 2\omega_2)$ et $H(u)$ par leur développements sous forme exponentielle :

$$H(u + 2\omega_2) = A_0 q e^{i\pi \frac{u}{2\omega_1}} + A_1 q e^{3i\pi \frac{u}{2\omega_1}} + \dots \\ - A_0 \frac{1}{q} e^{-i\pi \frac{u}{2\omega_1}} - A_1 \frac{1}{q^3} e^{-3i\pi \frac{u}{2\omega_1}} - \dots \\ -\frac{1}{q} e^{-i\pi \frac{u}{2\omega_1}} H(u) = \frac{A_0}{q} e^{-i\pi \frac{u}{2\omega_1}} + \frac{A_1}{q} e^{i\pi \frac{u}{2\omega_1}} + \frac{A_2}{q} e^{3i\pi \frac{u}{2\omega_1}} \\ - \frac{A_0}{q} e^{-3i\pi \frac{u}{2\omega_1}} - \frac{A_1}{q} e^{-5i\pi \frac{u}{2\omega_1}} - \dots$$

Après identification, on obtient les relations :

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1}{q} A_1 = -q A_0 & \frac{1}{q} A_0 = -\frac{1}{q^3} A_1 \\
 \frac{1}{q} A_2 = -q^3 A_1 & \frac{1}{q} A_1 = -\frac{1}{q^5} A_2 \\
 \text{-----} & \text{-----} \\
 \frac{1}{q} A_n = -q^{2n-1} A_{n-1} & \frac{1}{q} A_{n-1} = -\frac{1}{q^{2n+1}} A_n
 \end{array}$$

qui se réduisent à :

$$\begin{array}{l}
 A_1 = -q^2 A_0 \\
 A_2 = -q^4 A_1 \\
 \text{-----} \\
 A_n = -q^{2n} A_{n-1}
 \end{array}$$

En multipliant membre à membre, on peut écrire la formule de récurrence à partir du coefficient initial A_0 :

$$A_n = (-1)^n q^{n(n+1)} A_0$$

L'expression (12) se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 H(u) &= A_0 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \left\{ e^{(2n+1)i\pi \frac{u}{2w_1}} - e^{-(2n+1)i\pi \frac{u}{2w_1}} \right\} \\
 &= a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin \left((2n+1) \pi \frac{u}{2w_1} \right)
 \end{aligned}$$

Enfin, la fonction $H(u)$, déterminée à partir de la dérivée logarithmique de $\mathcal{Z}(u)$, est définie à une constante près. On choisit pour a_0 la valeur :

$$a_0 = 2 e^{\frac{\pi i \omega_2}{4 \omega_1}} = 2 q^{1/4}$$

et $H(u)$ sera alors complètement définie par les deux développements ci-dessous, l'un pris sous forme de sinus, l'autre pris sous forme exponentielle :

$$(13) \quad H(u) = 2 q^{1/4} \left\{ \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} - q^2 \sin \frac{3\pi u}{2\omega_1} + q^6 \sin \frac{5\pi u}{2\omega_1} - \dots \right\}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin (2n+1) \frac{\pi u}{2\omega_1}$$

$$(14) \quad H(u) = -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)i \frac{\pi u}{2\omega_1}}$$

2,3 - PRINCIPALES NOTATIONS

Pour définir la fonction $H(u)$, nous avons conservé la notation de JACOBI, qui est celle des premiers travaux sur les fonctions thêta.

Afin de faciliter l'écriture, de nombreux auteurs, qui ont poursuivi l'étude de ces fonctions, ont adopté une notation plus condensée, et ont choisi comme variable z le rapport addimensionnel $u/2\omega_1$

$$z = \frac{u}{2\omega_1}$$

Les points homologues, dans le quadrillage des périodes, ont alors pour définition :

$$z = z_0 + m + n \tau \quad m \text{ et } n \text{ entiers}$$

D'autres auteurs ont utilisé la variable

$$Z = \pi \frac{u}{2\omega_1}$$

et l'expression générale de l'affixe d'un point est donnée par :

$$Z = Z_0 + m \pi + n \pi \tau \quad m \text{ et } n \text{ entiers}$$

2,4 - DEFINITION DE LA FONCTION $\theta_1(v/q)$

Notre étude des fonctions thêta a pour but d'exprimer les fonctions elliptiques de JACOBI sous une forme convenable pour le calcul numérique. Nous avons alors volontairement limité l'analyse qui suit, au cas où les demi périodes ω_1 et ω_2

sont représentées par :

$$\omega_1 = K, \quad \omega_2 = iK' \quad \text{avec } K \text{ et } K' \text{ réels}$$

La variable v est définie par le rapport :

$$v = \frac{u}{2K}$$

Le rapport τ des périodes et le paramètre q ont pour expression :

$$(15) \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = i \frac{K'}{K}$$

$$(16) \quad q = \exp. i\pi\tau = \exp. -\pi \frac{K'}{K}$$

La fonction $\theta_1 (v/q)$ s'identifie à la fonction $H (u)$ pour laquelle les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$ sont respectivement réelle et imaginaire pure.

Nous poursuivrons notre étude des fonctions thêta, à partir du développement trigonométrique de $\theta_1 (v/q)$ donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \theta_1(v/q) &= 2 q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} \sin(2n+1) \pi v \\ &= -i q^{1/4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} e^{(2n+1)i\pi v} \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons continué à appeler "périodes" les quantités $2\omega_1, 2\omega_2$ qui nous ont permis de définir la fonction $\sigma (u)$. Rappelons cependant que les fonctions $\zeta (u)$; $\mathfrak{Z}(u)$; $H (u)$ déduites de $\sigma (u)$ ne sont pas doublement périodiques.

En particulier, la fonction $H (u)$ admet une période égale à $4 \omega_1$ et une pseudo période égale à $4 \omega_2$; la fonction $\theta_1 (v/q)$ admet par conséquent une période égale à 2 et une pseudo période égale à 2τ .

2,5 - DEFINITION DES FONCTIONS $\theta_2 (v/q)$, $\theta_3 (v/q)$, $\theta_4 (v/q)$

En trigonométrie, on peut définir la fonction $\cos (u)$ à partir de la fonction $\sin (u)$ en additionnant à l'argument u une constante égale au quart de la période :

$$\cos \frac{\pi u}{2\omega_1} = \sin \frac{\pi}{2\omega_1} (u + \omega_1)$$

De la même façon, les fonctions $\theta_2(v/q)$: $\theta_3(v/q)$ et $\theta_4(v/q)$ sont obtenues à partir de $\theta_1(v/q)$ en ajoutant à l'argument v une constante égale à une combinaison du quart de la période et de la pseudo période de $\theta_1(v/q)$ soit :

$$1/2 \quad ; \quad 1/2 + \tau/2 \quad ; \quad \tau/2$$

On pose, par définition :

$$(18) \quad \theta_2(v/q) = \theta_1(v + 1/2 / q)$$

$$(19) \quad \theta_3(v/q) = \frac{1}{M} \theta_1(v + 1/2 + \tau/2 / q)$$

$$(20) \quad \theta_4(v/q) = \frac{1}{i M} \theta_1(v + \tau/2 / q)$$

où M est un multiplicateur exponentiel ayant pour expression :

$$(21) \quad M(v) = q^{-1/4} \exp. -i\pi v$$

Le multiplicateur $M(v)$ a été introduit, pour les fonctions θ_3 et θ_4 , dans le but de les rendre réelles lorsque l'argument v est lui-même réel.

Les développements sous forme exponentielle et sous forme trigonométrique s'écrivent alors :

$$(22) \quad \begin{aligned} \theta_1(v/q) &= -i q^{1/4} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} e^{(2n+1)i\pi v} \\ &= 2 q^{1/4} \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin(2n+1)\pi v \end{aligned}$$

$$(23) \quad \begin{aligned} \theta_2(v/q) &= q^{1/4} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n(n+1)} e^{(2n+1)i\pi v} \\ &= 2 q^{1/4} \sum_{0}^{+\infty} q^{n(n+1)} \cos(2n+1)\pi v \end{aligned}$$

$$(24) \quad \theta_3(v/q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)i\pi v}$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi v$$

$$(25) \quad \theta_4(v/q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)i\pi v}$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi v$$

Remarque : Lorsqu'il n'existera aucune ambiguïté sur la valeur du paramètre q , nous adopterons la notation :

$$\theta_j(v/q) = \theta_j(v) \quad j = 1 ; 2 ; 3 ; 4.$$

et quand l'argument v sera égal à zéro, nous écrirons :

$$\theta_j(o/q) = \theta_j \quad j = 1 ; 2 ; 3 ; 4.$$

2,6 - FORMULES DE CHANGEMENT D'ARGUMENT

Les propriétés relatives au changement d'argument des fonctions $\theta_1(v/q)$, $\theta_2(v/q)$, $\theta_3(v/q)$ et $\theta_4(v/q)$ découlent directement des formules de définition. Elles sont consignées dans le Tableau I dans lequel les multiplicateurs $M(v)$ et $N(v)$ sont définis par les expressions suivantes :

$$M(v) = q^{-1/4} \exp. -i\pi v$$

$$(26) \quad N(v) = q^{-1} \exp. -2i\pi v$$

	$-v$	$v \pm 1/2$	$v \pm 1$	$v + 1/2 + \tau/2$	$v + \tau$	$v + \tau/2$	$v - 1 - \tau$
$\theta_1(v/q)$	$-\theta_1$	$\pm \theta_2$	$-\theta_1$	$M\theta_3$	$-N\theta_1$	$iM\theta_4$	$-N\theta_1$
$\theta_2(v/q)$	θ_2	$\mp \theta_1$	$-\theta_2$	$-iM\theta_4$	$N\theta_2$	$M\theta_3$	$-N\theta_2$
$\theta_3(v/q)$	θ_3	θ_4	θ_3	$iM\theta_1$	$N\theta_3$	$M\theta_2$	$N\theta_3$
$\theta_4(v/q)$	θ_4	θ_3	θ_4	$M\theta_2$	$-N\theta_4$	$iM\theta_1$	$-N\theta_4$

Tableau I

2,7 - ZEROS DES FONCTIONS THETA

Les expressions générales de l'argument v pour lequel les fonctions θ_1 ; θ_2 ; θ_3 ; θ_4 sont nulles, sont respectivement :

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots \theta_1 (v/q) :$	$\theta_2 (v/q) :$	$\theta_3 (v/q) :$	$\theta_4 (v/q) :$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots m + n \tau :$	$m + 1/2 + n \tau :$	$m + 1/2 + (n+1/2) \tau :$	$m + (n+1/2) \tau :$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

m et n étant des entiers.

2,8 - DEVELOPPEMENTS EN PRODUITS INFINIS SIMPLES

Les développements en produits infinis des fonctions $\theta_j (v/q)$ se déduisent de celui de $\theta_1 (v/q)$ en faisant les changements d'arguments appropriés.

Par exemple, la fonction $\theta_4 (v/q)$ est obtenue en remplaçant v par $v + \tau/2$ dans l'expression (9) soit :

$$\begin{aligned}
 \theta_4(v/q) &= -\frac{C}{iM} \sin \pi \left(v + \frac{\tau}{2} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n} e^{2i\pi \left(v + \frac{\tau}{2} \right)} \right) \left(1 - q^{2n} e^{2i\pi \left(v + \frac{\tau}{2} \right)} \right) \\
 (27) \quad &= A (1 - q e^{i\pi v}) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n+1} e^{2i\pi v} \right) \left(1 - q^{2n-1} e^{-2i\pi v} \right)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{C}{2q^{1/4}} \\
 \theta_4(v/q) &= A (1 - q e^{i\pi v}) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n-1} e^{2i\pi v})}{(1 - q e^{i\pi v})} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} e^{2i\pi v}) \\
 \theta_4(v/q) &= A \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - 2q^{(2n-1)} \cos 2\pi v + q^{4n-2} \right)
 \end{aligned}$$

La valeur de la constante A est donnée par la formule

$$(28) \quad A = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$$

que nous justifierons au paragraphe (2,10)

Des expressions analogues sont obtenues pour les fonctions $\theta_2(v/q)$ et $\theta_3(v/q)$ en faisant successivement les changements d'argument $v + 1/2$ et $v + 1/2 + \tau/2$ dans l'expression (9) d'où :

$$(29) \quad \theta_1(v/q) = 2 A q^{1/4} \sin \pi v \prod (1 - 2 q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n})$$

$$(30) \quad \theta_2(v/q) = 2 A q^{1/4} \cos \pi v \prod (1 + 2 q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n})$$

$$(31) \quad \theta_3(v/q) = A \prod (1 + 2 q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2})$$

$$(32) \quad \theta_4(v/q) = A \prod (1 - 2 q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2})$$

2.9 - RELATION ENTRE $\theta_1(o)$ et $\theta_2(o)$; $\theta_3(o)$, $\theta_4(o)$

Les expressions de $\theta_2(o/q)$; $\theta_3(o/q)$ et $\theta_4(o/q)$ sous forme de produits infinis et pour v égal à zéro, s'écrivent :

$$(33) \quad \theta_2(o/q) = 2 q^{1/4} A \prod (1 + q^{2n})^2$$

$$(34) \quad \theta_3(o/q) = A \prod (1 - q^{2n-1})^2$$

$$(35) \quad \theta_4(o/q) = A \prod (1 + q^{2n-1})^2$$

En utilisant la relation due à EULER :

$$\prod (1 + q^n) = \frac{1}{\prod (1 - q^{2n-1})}$$

on peut tirer une relation liant $\theta_2(o)$, $\theta_3(o)$ et $\theta_4(o)$

$$\frac{\theta_2(o)}{2 \sqrt[4]{q} A} \cdot \frac{\theta_4(o)}{A} = \frac{A}{\theta_3(o)}$$

qui se met sous la forme :

$$(36) \quad \theta_2(0) \cdot \theta_3(0) \cdot \theta_4(0) = 2 q^{1/4} A^3$$

Le calcul de la dérivée de $\theta_1(0)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta_1'(0|q) &= \pi A 2 q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 \\ &= \pi 2 q^{1/4} A^3 \end{aligned}$$

On déduit des deux relations (35) et (36) l'égalité :

$$(37) \quad \theta_1'(0|q) = \pi \cdot \theta_2(0|q) \cdot \theta_3(0|q) \cdot \theta_4(0|q)$$

2,10 - DETERMINATION DE LA CONSTANCE A

La relation liant $\theta_1'(0|q)$ à $\theta_2(0|q)$; $\theta_3(0|q)$ et $\theta_4(0|q)$ du paragraphe précédent, s'écrit :

$$(38) \quad \prod (1 - q^{2n})^2 = A^2 \prod (1 + q^{2n})^2 \prod (1 + q^{2n-1})^2 \prod (1 - q^{2n-1})^2$$

Puisque $|q| < 1$, tous les produits sont absolument convergents, et ils peuvent être mis dans n'importe quel ordre. Considérons alors l'expression :

$$(39) \quad \left\{ \prod (1 - q^{2n-1}) \prod (1 - q^{2n}) \right\} \left\{ \prod (1 + q^{2n-1}) \prod (1 + q^{2n}) \right\}$$

Les termes en $2n-1$ comptent tous les termes impairs et ceux en $2n$ tous les termes pairs. Chaque parenthèse inclut donc tous les termes où n est entier positif, et on a :

$$\begin{aligned} \prod (1 - q^{2n-1}) \prod (1 - q^{2n}) &= \prod (1 - q^n) \\ \prod (1 + q^{2n-1}) \prod (1 + q^{2n}) &= \prod (1 + q^n) \end{aligned}$$

L'expression (39) est donc égale à : $\prod (1 - q^{2n})$. On en déduit que :

$$\prod (1 + q^{2n}) \cdot \prod (1 + q^{2n-1}) \cdot \prod (1 - q^{2n-1}) \quad \text{est égal à 1.}$$

et après avoir reporté dans la relation (38) il vient :

$$A = \pm \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^{2n})^2$$

Pour lever l'ambiguïté du signe, il suffit de remarquer que A est une fonction analytique de q (elle ne prend qu'une seule valeur pour $|q| < 1$) et que pour q tendant vers zéro, $\theta_3(0/q)$ tend vers 1. Nous prendrons le signe + ; soit

$$(40) \quad A = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^{2n})^2$$

2,11 - RELATIONS ENTRE LES CARRES DES FONCTIONS THETA

Considérons les fonctions $\theta_1^2(v/q)$; $\theta_2^2(v/q)$; $\theta_3^2(v/q)$ et $\theta_4^2(v/q)$.
Chacune d'elles :

- est analytique pour tout v
- admet les facteurs multiplicatifs 1 et $q^{-2} \exp. -4i\pi v$ associés aux périodes 1 et τ
- à une racine double dans un parallélogramme des périodes.

Considérons maintenant les rapport :

$$\frac{a \theta_1^2(v/q) + b \theta_4^2(v/q)}{\theta_2^2(v/q)} \quad \text{et} \quad \frac{a' \theta_1^2(v/q) + b' \theta_4^2(v/q)}{\theta_3^2(v/q)}$$

où les coefficients a, b, a', b' sont des constantes.

Ils forment des fonctions doublement périodiques, de périodes 1 et τ , qui admettent un pôle d'ordre 2 à l'intérieur d'un parallélogramme des périodes.

Si l'on fait un choix convenable des constantes a, b, a', b', ces rapports peuvent n'avoir qu'un seul pôle simple à l'intérieur d'un parallélogramme des périodes. Or d'après le théorème 1,2,1 elles se réduisent à une constante.

On peut prendre cette constante égale à l'unité, on aura alors les deux relations :

$$(41) \quad \begin{aligned} \theta_2^2(v/q) &= a \theta_1^2(v/q) + b \theta_4^2(v/q) \\ \theta_3^2(v/q) &= a' \theta_1^2(v/q) + b' \theta_4^2(v/q) \end{aligned}$$

Les coefficients a, b, a', b' sont déterminés par le système d'équations (42), obtenu en faisant $v = 0$ et $v = \tau/2$ dans les équations (41) :

$$(42) \quad \begin{aligned} \theta_3^2(0) &= -a \theta_4^2(0) \\ \theta_2^2(0) &= -a' \theta_4^2(0) \\ \theta_2^2(0) &= b \theta_4^2(0) \\ \theta_3^2(0) &= b' \theta_4^2(0) \end{aligned}$$

Reportons les valeurs trouvées pour a, b, a', b' dans (41) :

$$(43) \quad \begin{aligned} \theta_2^2(v/q) \cdot \theta_4^2(0) &= \theta_4^2(v/q) \theta_2^2(0) - \theta_1^2(v/q) \cdot \theta_3^2(0) \\ \theta_3^2(v/q) \cdot \theta_4^2(0) &= \theta_4^2(v/q) \theta_3^2(0) - \theta_1^2(v/q) \cdot \theta_2^2(0) \end{aligned}$$

Après changement de variable v en $v + 1/2$, les équations (43) s'écrivent encore :

$$(44) \quad \begin{aligned} \theta_1^2(v/q) \cdot \theta_4^2(0) &= \theta_3^2(v/q) \theta_2^2(0) - \theta_2^2(v/q) \cdot \theta_3^2(0) \\ \theta_4^2(v/q) \cdot \theta_4^2(0) &= \theta_3^2(v/q) \theta_3^2(0) - \theta_2^2(v/q) \cdot \theta_2^2(0) \end{aligned}$$

En particulier, en faisant v égal à zéro dans la deuxième relation ci-dessus, on obtient :

$$(45) \quad \theta_2^4(0/q) + \theta_4^4(0/q) = \theta_3^4(0/q)$$

2,12 - FORMULES D'ADDITION

Nous allons considérer dans ce qui suit le produit des deux fonctions : $\theta_1(v+w/q)$ et $\theta_1(v-w/q)$. Les facteurs exponentiels sont 1 et $q^{-2} \exp^{-4i\pi v}$ associés aux périodes 1 et τ .

La fonction $F(v)$ telle que :

$$F(v) = a \theta_3^2(v) + b \theta_2^2(v),$$

où a et b sont des constantes, admet les mêmes périodes et les mêmes multiplicateurs exponentiels.

Le rapport $\phi(v)$

$$\phi(v) = \frac{F(v)}{\theta_1(v+w) \theta_1(v-w)}$$

peut, par un choix convenable du rapport a/b , être rendu tel qu'il n'ait pas de pôle aux zéros de $\theta_1(v+w/q)$ et un seul pôle d'ordre un aux zéros de $\theta_1(v-w/q)$. Il se réduit dans ce cas à une constante (théorème 1,2,1) que l'on pourra prendre égale à l'unité.

$$(46) \quad \theta_1(v+w) \cdot \theta_1(v-w) = a \theta_3^2(v) + b \theta_2^2(v)$$

Faisons $v = 1/2$ et $v = \frac{1}{2} + \tau/2$ dans l'expression (46); nous pouvons alors extraire a et b en fonction de w .

$$a = \frac{\theta_2^2(w)}{\theta_4^2(o)} \quad ; \quad b = - \frac{\theta_3^2(w)}{\theta_4^2(o)}$$

La formule d'addition pour la fonction θ_1 s'écrit donc :

$$(47) \quad \theta_1(v+w) \cdot \theta_1(v-w) \cdot \theta_4^2(o) = \theta_3^2(v) \theta_2^2(w) - \theta_2^2(v) \cdot \theta_3^2(w)$$

Une autre forme est obtenue par changement de v en $v + 1/2 + \tau/2$ et w en $w + 1/2 + \tau/2$.

$$(48) \quad \theta_1(v+w) \cdot \theta_1(v-w) \cdot \theta_4^2(o) = \theta_1^2(v) \theta_4^2(w) - \theta_4^2(v) \cdot \theta_1^2(w)$$

Les formules correspondant à θ_2 , θ_3 et θ_4 se déduisent de la même façon :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2(v+w) \cdot \theta_2(v-w) \cdot \theta_4^2(o) = \theta_4^2(v) \theta_2^2(w) - \theta_1^2(v) \theta_3^2(w) \\ = \theta_2^2(v) \theta_4^2(w) - \theta_3^2(v) \theta_1^2(w) \\ \theta_3(v+w) \cdot \theta_3(v-w) \cdot \theta_4^2(o) = \theta_4^2(v) \theta_3^2(w) - \theta_1^2(v) \theta_2^2(w) \\ = \theta_3^2(v) \theta_4^2(w) - \theta_2^2(v) \theta_1^2(w) \\ \theta_4(v+w) \cdot \theta_4(v-w) \cdot \theta_4^2(o) = \theta_3^2(v) \theta_3^2(w) - \theta_2^2(v) \theta_2^2(w) \\ = \theta_4^2(v) \theta_4^2(w) - \theta_1^2(v) \theta_1^2(w) \end{array} \right.$$

Les formules relatives à θ_4 peuvent encore prendre la forme :

$$\begin{aligned}\theta_4(v+w) \cdot \theta_4(v-w) \cdot \theta_2^2(o) &= \theta_4^2(v) \theta_2^2(w) + \theta_3^2(v) \theta_1^2(w) \\ &= \theta_2^2(v) \theta_4^2(w) + \theta_1^2(v) \theta_3^2(w)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_4(v+w) \cdot \theta_4(v-w) \cdot \theta_3^2(o) &= \theta_4^2(v) \theta_3^2(w) + \theta_2^2(v) \theta_1^2(w) \\ &= \theta_3^2(v) \theta_4^2(w) + \theta_1^2(v) \theta_2^2(w)\end{aligned}$$

Enfin, en posant $v = w$, on obtient les fonctions θ_j pour un argument double :

$$\begin{aligned}\theta_1(2v/q) &= 2 \frac{\theta_1(v) \theta_2(v) \theta_3(v) \theta_4(v)}{\theta_2(o) \theta_3(o) \theta_4(o)} \\ \theta_2(2v/q) &= \frac{\theta_2^2(v) \theta_3^2(v) - \theta_1^2(v) \theta_4^2(v)}{\theta_2(o) \theta_3^2(o)} \\ \theta_3(2v/q) &= \frac{\theta_2^2(v) \theta_3^2(v) + \theta_1^2(v) \theta_4^2(v)}{\theta_2^2(o) \theta_3(o)} \\ \theta_4(2v/q) &= \frac{\theta_3^4(v) - \theta_2^4(v)}{\theta_4^3(o)} = \frac{\theta_4^4(v) - \theta_1^4(v)}{\theta_4^3(o)}\end{aligned}\tag{50}$$

2,13 - TRANSFORMATIONS DES FONCTIONS THETA -

1 - Transformation de JACOBI

Les développements précédents des fonctions thêta ont été établis dans l'hypothèse d'une période $2\omega_1$ réelle et d'une pseudo période $2\omega_2$ imaginaire. Il est intéressant de considérer le cas où ces développements s'expriment avec une période $2\omega_1$ imaginaire et une période $2\omega_2$ réelle.

La transformation de JACOBI permet d'exprimer une quelconque des fonctions thêta de période $2\omega_1$ imaginaire et de pseudo période $2\omega_2$ réelle, par une fonction

thêta de période $2\omega_1$ réelle et de pseudo période $2\omega_2$ imaginaire.

Cette transformation de JACOBI est caractérisée par la matrice de passage :

$$(51) \quad \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Avec la notation convenue, les deux demi périodes, le paramètre q et la variable v de la fonction transformée s'expriment par :

$$\omega'_1 = i K' \quad \omega'_2 = -K$$

$$\tau' = -\frac{K}{iK'} = -\frac{1}{\tau}$$

$$(52) \quad q' = \exp. i\pi\tau' = \exp. -\frac{i\pi}{\tau} = \exp. -\frac{\pi K}{K'}$$

$$(53) \quad v' = \frac{u}{2iK'} = \frac{v}{\tau}$$

Considérons deux fonctions θ_3 caractérisées l'une par le paramètre q , l'autre par le paramètre q' . Les zéros de ces fonctions sont respectivement :

$$v = (m + 1/2) + (n + 1/2) \tau \quad m \text{ et } n \text{ entiers}$$

$$v' = (m' + 1/2) + (n' + 1/2) \tau' \quad m' \text{ et } n' \text{ entiers}$$

La valeur de v et de v' rendant $\theta_3(v/q)$ et $\theta_3(v'/q')$ nulles sont identiques pour :

$$(54) \quad \begin{cases} m' = -n - 1 \\ n' = m \end{cases}$$

Si nous étudions le rapport $\psi(v)$ de ces deux fonctions, auquel on affecte le coefficient multiplicateur $\exp. i\pi \frac{v^2}{\tau}$:

$$\psi(v) = e^{i\pi \frac{v^2}{\tau}} \frac{\theta_3(v'/q')}{\theta_3(v/q)}$$

on constate d'une part, qu'il n'a ni zéro ni pôle lorsque les relations (54) sont satisfaites.

D'autre part, les rapports

$$\frac{\psi(\tau+z)}{\psi(\tau)} = \frac{e^{-2i\pi\tau - i\pi z}}{q^{-1} e^{-2i\pi\tau}}$$

$$\frac{\psi(\tau-1)}{\psi(\tau)} = \frac{e^{-2i\pi\tau - i\pi}}{q^{-1} e^{-2i\pi\tau}}$$

sont tous les deux égaux à 1. Il en résulte que $\psi(v)$ est doublement périodique, de période τ et -1 .

On peut en conclure que $\psi(v)$ se réduit à une constante λ (théorème 1,2,1) et la transformation s'écrit :

$$(55) \quad \lambda \theta_3(\tau/q) = e^{i\pi\tau^2/\tau} \theta_3(\tau'/q')$$

L'expression (55) peut être étendue aux autres fonctions thêta par les changements d'arguments : $v + 1/2 + \tau/2$; $v + \tau/2$ et $v + 1/2$; on obtient ainsi :

$$(56) \quad \lambda \theta_1(\tau/q) = -i e^{i\pi\tau^2/\tau} \theta_1(\tau'/q')$$

$$(57) \quad \lambda \theta_2(\tau/q) = e^{i\pi\tau^2/\tau} \theta_4(\tau'/q')$$

$$(58) \quad \lambda \theta_4(\tau/q) = e^{i\pi\tau^2/\tau} \theta_2(\tau'/q')$$

Il reste à déterminer le coefficient λ . Pour cela, nous différencions l'expression (56) et nous faisons v égal à zéro.

$$\lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \theta_1(\tau/q) \right\}_{\tau=0} = -i \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} e^{i\pi\tau^2/\tau} \theta_1(\tau'/q') \right\}_{\tau=0}$$

$$\lambda \theta_1'(0/q) = \left(-i \frac{1}{\tau} \right) \theta_1'(0/q')$$

Explicitons les dérivées θ'_1 au moyen de la relation (37)

$$\lambda \pi \theta_2(q) \theta_3(q) \theta_4(q) = -i \frac{\pi}{z} \theta_2(q') \theta_3(q') \theta_4(q')$$

Compte tenu des relations (56) ; (57) ; (58) dans lesquelles on fait $v = 0$,
il vient :

$$\lambda^{-2} = -i \frac{1}{\tau}$$

soit :

$$(59) \quad \lambda = \pm (-i\tau)^{1/2}$$

Pour lever l'indétermination sur le signe, on peut remarquer que dans
l'expression (55) où v est égal à zéro :

$$A \theta_3(0/q) = \theta_3(0/q')$$

les deux fonctions thêta sont positives ; nous devons donc prendre le signe +, et
les quatre formules de transformation s'écrivent :

$$(60) \quad \theta_1(v'/q') = (-i)(-iz)^{1/2} e^{i\pi \frac{v'^2}{z}} \theta_1(v/q)$$

$$(61) \quad \theta_2(v'/q') = (-iz)^{1/2} e^{i\pi \frac{v'^2}{z}} \theta_4(v/q)$$

$$(62) \quad \theta_3(v'/q') = (-iz)^{1/2} e^{i\pi \frac{v'^2}{z}} \theta_3(v/q)$$

$$(63) \quad \theta_4(v'/q') = (-iz)^{1/2} e^{i\pi \frac{v'^2}{z}} \theta_2(v/q)$$

Remarque : L'expression (60) de la transformation de JACOBI, pour la fonction $\theta_1(v/q)$
peut se déduire d'une forme générale à toute transformation du premier
ordre.

Si la matrice de la transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ avec } \det |\alpha\delta - \gamma\beta| = 1,$$

le paramètre q' et la variable v' s'expriment par :

Tableau V - Transformations du 1er ordre des fonctions thêta -

MATRICE	1/2 PERIODES		VARIABLE v'	τ'	PARAMETRE q'	$\theta_1(v'/q')$	$\theta_2(v'/q')$	$\theta_3(v'/q')$	$\theta_4(v'/q')$
	ω_1	ω_2							
$\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}$	K	$K + iK'$	v	$1 + \tau$	$-q$	$\sqrt{i} \theta_1(v/q)$	$\sqrt{i} \theta_2(v/q)$	$\theta_4(v/q)$	$\theta_3(v/q)$
$\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}$	iK'	$-K$	$\frac{v}{\tau}$	$-\frac{1}{\tau}$	$\text{Log } q' = \frac{\pi^2}{\tau^2} / \text{Log } q$	$-i F \theta_1(v/q)$	$F \theta_4(v/q)$	$F \theta_3(v/q)$	$F \theta_2(v/q)$
$\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$	$K + iK'$	iK'	$\frac{v}{1 + \tau}$	$\frac{\tau}{1 + \tau}$	$\text{Log } q' = \frac{\text{Log } q}{\text{Log } q / (1 + \tau)}$	$G \theta_1(v/q)$	$\sqrt{i} G \theta_3(v/q)$	$\sqrt{i} G \theta_2(v/q)$	$G \theta_4(v/q)$
$\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}$	$-K + iK'$	$-K$	$\frac{v}{-1 + \tau}$	$\frac{1}{1 - \tau}$	$\frac{1}{1 + i\pi} \text{Log } q' = \frac{1}{1 + i\pi} + \frac{\text{Log } q}{\text{Log } q / \pi^2}$	$-i H \theta_1(v/q)$	$\sqrt{i} H \theta_3(v/q)$	$\sqrt{i} H \theta_4(v/q)$	$H \theta_2(v/q)$
$\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}$	iK'	$-(K + iK')$	$\frac{v}{\tau}$	$-\frac{1 + \tau}{\tau}$	$\text{Log } q' = \frac{\pi^2}{\tau^2} / \text{Log } q - i\pi$	$-i K \theta_1(v/q)$	$K \theta_4(v/q)$	$\sqrt{i} K \theta_2(v/q)$	$\sqrt{i} K \theta_3(v/q)$
$\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$	$K - iK'$	iK'	$\frac{v}{1 + \tau}$	$\frac{\tau}{1 - \tau}$	$\text{Log } q' = \frac{\text{Log } q}{\text{Log } q' / 1 - \tau}$	$\sqrt{i} J \theta_1(v/q)$	$J \theta_4(v/q)$	$J \theta_3(v/q)$	$\sqrt{i} J \theta_2(v/q)$

$$F = (-i : i)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi \frac{v'}{\tau}}$$

$$K = -\frac{1}{2} e^{i\pi \frac{v'}{\tau}}$$

$$G = (1 + i)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi \frac{v'}{1 + \tau}}$$

$$J = (1 - i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi \frac{v'}{1 - \tau}}$$

$$H = (-1 + \tau)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi \frac{v'}{1 + \tau}}$$

$$q' = e^{i\pi \left(\frac{\gamma + \delta z}{\alpha + \beta z} \right)} ; \quad v' = \frac{v}{\alpha + \beta z}$$

et la transformation appliquée à $\theta_1 (v/q)$ est donnée par la formule :

$$(64) \quad \theta_1 (v'/q') = \varepsilon (\alpha + \beta z)^{1/2} e^{i\pi \frac{\beta v'^2}{\alpha + \beta z}} \theta_1 (v/q)$$

où $\varepsilon^8 = 1$. Pour trouver la détermination convenable de ε , il suffit de diviser par v la relation ci-dessus, de faire tendre v vers zéro et de comparer les deux membres.

Le Tableau II récapitule les résultats relatifs à quelques transformations du 1er ordre.

2 - Transformation de LANDEN

La transformation de LANDEN est une transformation d'ordre 2. Elle peut s'exprimer par la matrice de passage.

$$(65) \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix}$$

Les demi périodes, le paramètre et la variable de la fonction transformée s'expriment par :

$$(66) \quad \begin{aligned} \omega'_1 &= \frac{K}{2} & \omega'_2 &= iK' \\ \tau' &= \frac{2iK'}{K} = 2\tau & q' &= q^2 \end{aligned}$$

$$(67) \quad v' = \frac{u}{K} = 2v$$

Considérons le produit $G(v)$ de la fonction $\theta_3 (v/q)$ par la fonction $\theta_4 (v/q)$

$$G(v) = \theta_3 (v/q) \cdot \theta_4 (v/q)$$

$G(v)$ s'annule pour les zéros de $\theta_3(v/q)$ et pour ceux de $\theta_4(v/q)$, c'est-à-dire pour :

$$(68) \quad \begin{cases} v = (m + 1/2) + (n + 1/2) \tau \\ v = m + (n + 1/2) \tau \end{cases} \quad m \text{ et } n \text{ entiers}$$

Le système (68) se résume à :

$$(69) \quad 2v = m + 2(n + 1/2) \tau$$

On remarque que les zéros de $G(v)$ sont aussi ceux de $\theta_4(2v/q^2)$; le quotient :

$$(70) \quad \Gamma(v) = \frac{\theta_3(v/q) \cdot \theta_4(v/q)}{\theta_4(2v/q^2)}$$

n'a ni zéro ni pôle.

En outre le calcul des deux rapports:

$$\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v)} = \frac{\theta_3(v/q) \cdot \theta_4(v/q)}{\theta_4(2v/q^2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(v)} = 1$$

et

$$\frac{\Gamma(v+\tau)}{\Gamma(v)} = \frac{N(v) \theta_3(v/q) [-N(v)] \theta_4(v/q)}{[-N(2v)] \theta_4(2v/q^2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(v)} = 1$$

montre que $\Gamma(v)$ admet les deux périodes 1 et τ .

Ces deux propriétés impliquent que $\Gamma(v)$ se réduit à une constante (théorème 1,2,1).

Cette constante se détermine en faisant v égal à zéro dans $\Gamma(v)$ soit :

$$(71) \quad \frac{\theta_3(\tau/q) \cdot \theta_4(\tau/q)}{\theta_4(2\tau/q^2)} = \frac{\theta_3(0/q) \cdot \theta_4(0/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

Nous allons chercher à simplifier cette constante. Pour cela, nous explicitons les fonctions thêta qui interviennent dans $\mathcal{I}(0)$ par leur représentation sous forme de produits infinis.

$$(72) \quad \theta_3(0/q) \cdot \theta_4(0/q) = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1})^2 \right\} \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1})^2 \right\}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^2 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n-2})^2$$

$$(73) \quad \theta_4(0/q^2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n-2})^2$$

$$= \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n-2}) \right\} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n-2})$$

Or, le produit des termes de puissance $4n$ par ceux de puissance $4n-2$ s'exprime plus simplement par le produit de tous les termes de puissance $2n$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n-2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})$$

L'identification des relations (72) et (73) permet de conclure que :

$$(74) \quad \theta_4(0/q^2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{4n-2})$$

$$= \left\{ \theta_3(0/q) \cdot \theta_4(0/q) \right\}^{1/2}$$

Le rapport $\mathcal{I}(v)$ est égal à la constante $\mathcal{I}(0)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{I}(0) = \left\{ \theta_3(0/q) \cdot \theta_4(0/q) \right\}^{1/2}$$

et la formule de transformation pour la fonction θ_4 s'écrit :

$$(75) \quad \theta_4(2\tau/q^2) = \frac{\theta_3(\tau/q) \cdot \theta_4(\tau/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

Le changement de v en $v + \tau/2$ dans l'expression (75) donne la relation en fonction de $\theta_1(2v/q^2)$

$$(76) \quad \theta_1(2\tau/q^2) = \frac{\theta_1(\tau/q) \cdot \theta_2(\tau/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

Les fonctions $\theta_2(2v/q^2)$ et $\theta_3(2v/q^2)$ s'obtiennent par les changements de variable de v en $v + 1/2$ dans les expressions (75) et (76) soit :

$$(77) \quad \theta_2(2\tau/q^2) = \frac{\theta_1(\tau+1/4/q) \cdot \theta_2(\tau+1/4/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

$$= \frac{\theta_2(\tau+1/4/q) \cdot \theta_2(\tau-1/4/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

$$(78) \quad \theta_3(2\tau/q^2) = \frac{\theta_3(\tau+1/4/q) \cdot \theta_4(\tau+1/4/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

$$= \frac{\theta_4(\tau+1/4/q) \cdot \theta_4(\tau-1/4/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

Explicitons la formule (78) par une des relations (49) :

$$(79) \quad \theta_3(2\tau/q^2) = \frac{\theta_4^2(\tau/q) \theta_4^2(1/4/q) - \theta_1^2(\tau/q) \theta_1^2(1/4/q)}{\theta_4^2(0/q) \cdot \theta_4(0/q^2)}$$

Il est facile de vérifier que

$$(80) \quad \theta_3(1/4/q) = \theta_4(1/4/q) = \theta_4(0/q^4)$$

que l'on peut écrire en utilisant la relation (74) :

$$(81) \quad \theta_4(1/4/q) = \left\{ \theta_3(0/q^2) \cdot \theta_4(0/q^2) \right\}^{1/2}$$

Nous pouvons en outre exprimer $\theta_1(1/4/q)$ en fonction de $\theta_4(1/4/q)$ par la relation (48) :

$$(82) \quad \theta_1^2(1/4/q) = \frac{1}{\theta_2^2(0/q)} \left\{ \theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q) \right\} \theta_4^2(1/4/q)$$

L'équation (79) s'écrit :

$$\theta_3(2\pi/q^2) = \frac{\theta_4^2(1/4/q)}{\theta_4^2(0/q) \theta_4(0/q^2)} \left\{ \theta_4^2(\pi/q) - \theta_1^2(\pi/q) \frac{(\theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q))}{\theta_2^2(0/q)} \right\}$$

ou encore :

$$(83) \quad \theta_3(2\pi/q^2) = \frac{\theta_3(0/q^2)}{\theta_2^2(0/q)} \left\{ \theta_2^2(\pi/q) + \theta_1^2(\pi/q) \right\}$$

Explicitons $\theta_3(0/q^2)$. La relation (49) dans laquelle on fait $w = v = 1/4$ s'écrit :

$$(84) \quad \theta_4(1/2/q) \theta_4^3(0/q) = \theta_4^4(1/4/q) - \theta_1^4(1/4/q)$$

Remplaçons $\theta_1(1/4/q)$ par sa fonction de $\theta_4(1/4/q)$, il vient :

$$(85) \quad \theta_3(0/q) \cdot \theta_4^3(0/q) = \theta_4^4(1/4/q) \left\{ 1 - \frac{(\theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q))^2}{\theta_2^4(0/q)} \right\}$$

On peut alors tirer $\theta_3(0/q^2)$ de $\theta_4(1/4/q)$ par les relations (81), (85) et (74) : soit

$$(86) \quad \begin{aligned} \theta_3^2(0/q^2) &= \frac{1}{\theta_4^2(0/q^2)} \frac{\theta_3(0/q) \theta_4^3(0/q) \theta_4^4(0/q)}{\left\{ \theta_2^4(0/q) - \left\{ \theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q) \right\}^2 \right\}} \\ &= \frac{\theta_2^4(0/q)}{2 \left\{ \theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q) \right\}} \end{aligned}$$

que l'on peut exprimer en fonction de θ_3 et θ_4 par :

(87)

$$\theta_3^2(0/q^2) = \frac{1}{2} \left\{ \theta_3^2(0/q) + \theta_4^2(0/q) \right\}$$

Reportons la valeur de $\theta_3(0/q^2)$ donnée par la relation (86) dans la formule (83), on a :

(88)

$$\theta_3(2\pi/q^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\theta_2^2(\pi/q) + \theta_1^2(\pi/q)}{[\theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q)]^{1/2}}$$

En remplaçant $\theta_1(v/q)$ et $\theta_2(v/q)$ par leurs expressions en fonction de $\theta_3(v/q)$ et $\theta_4(v/q)$, (formules (43) et (44)), $\theta_3(2v/q^2)$ prend la forme :

$$\theta_3(2\pi/q^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\theta_3^2(\pi/q) + \theta_4^2(\pi/q)}{[\theta_3^2(0/q) + \theta_4^2(0/q)]^{1/2}}$$

(89)

$$\theta_3(2\pi/q^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\theta_3^2(\pi/q) + \theta_4^2(\pi/q)}{\theta_3(0/q^2)}$$

De la relation (45), on peut tirer un résultat pour $\theta_2(0/q^2)$

$$\theta_2^4(0/q^2) = \theta_3^4(0/q^2) - \theta_4^4(0/q^2)$$

soit avec les formules (74) et (87) :

(90)

$$\theta_2(0/q^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q) \right\}^{1/2}$$

Le calcul de $\theta_2(2v/q^2)$ se fait en explicitant la relation (77) par la formule (49) :

$$\begin{aligned} \theta_2(2\pi/q^2) &= \frac{\theta_2^2(\pi/q) \theta_4^2(\pi/4/q) - \theta_3^2(\pi/q) \theta_1^2(\pi/4/q)}{\theta_4(0/q^2)} \\ &= \theta_3(0/q^2) \left\{ \frac{-\theta_4^2(\pi/q) \theta_4^2(0/q) + \theta_3^2(\pi/q) \theta_4^2(0/q)}{\theta_2^2(0/q) \theta_4^2(0/q)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_2(2v/q^2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\theta_3^2(0/q) + \theta_4^2(0/q) \right]^{1/2} \left\{ \frac{\theta_3^2(v/q) - \theta_4^2(v/q)}{(\theta_3^4(0/q) - \theta_4^4(0/q))^{1/2}} \right\} \\
 &= \frac{\theta_3^2(v/q) - \theta_4^2(v/q)}{2 \theta_2(0/q^2)}
 \end{aligned}
 \tag{91}$$

La transformation de θ_3 et θ_4 en fonction de θ_1 et θ_2 par les formules (44) et (43) permet d'écrire :

$$\theta_2(2v/q^2) = \frac{\theta_2^2(v/q) - \theta_1^2(v/q)}{2 \theta_3(0/q^2)}
 \tag{92}$$

Calculons enfin la dérivée de $\theta_1(2v/q^2)$ pour v égal à zéro :

$$\begin{aligned}
 \theta_1'(0/q^2) &= \pi \theta_2(0/q^2) \theta_3(0/q^2) \theta_4(0/q^2) \\
 &= \frac{\pi}{2} \left\{ \theta_3^4(0/q) - \theta_4^4(0/q) \right\}^{1/2} \left\{ \theta_3(0/q) \cdot \theta_4(0/q) \right\}^{1/2} \\
 &= \frac{\pi}{2} \theta_2^2(0/q) \left\{ \theta_3(0/q) \theta_4(0/q) \right\}^{1/2} \\
 &= \frac{\pi^{1/2}}{2} \left\{ \theta_2^3(0/q) \theta_1'(0/q) \right\}^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{\theta_2(0/q) \theta_1'(0/q)}{\left\{ \theta_3(0/q) \theta_4(0/q) \right\}^{1/2}}
 \end{aligned}
 \tag{93}$$

Nous pouvons alors dresser la liste récapitulative des formules de la transformation de LANDEN.

$$\theta_1'(0/q^2) = \frac{\pi^{1/2}}{2} \left\{ \theta_2^3(0/q) \theta_1'(0/q) \right\}^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{\theta_2(0/q) \theta_1'(0/q)}{\left[\theta_3(0/q) \cdot \theta_4(0/q) \right]^{1/2}}
 \tag{94}$$

$$\theta_2(0/q^2) = \frac{1}{2^{1/2}} \left\{ \theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q) \right\}^{1/2}.
 \tag{95}$$

$$(96) \quad \theta_3(0/q^2) = \frac{1}{2^{1/2}} \left\{ \theta_3^2(0/q) + \theta_4^2(0/q) \right\}^{1/2}$$

$$(97) \quad \theta_4(0/q^2) = \left\{ \theta_3(0/q) \cdot \theta_4(0/q) \right\}^{1/2}$$

$$(98) \quad \theta_1(2\tau/q^2) = \frac{\theta_1(\tau/q) \cdot \theta_2(\tau/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

$$(99) \quad \theta_2(2\tau/q^2) = \frac{\theta_3^2(\tau/q) - \theta_4^2(\tau/q)}{2 \theta_2(0/q^2)} = \frac{\theta_2^2(\tau/q) - \theta_1^2(\tau/q)}{2 \theta_3(0/q^2)}$$

$$(100) \quad \theta_3(2\tau/q^2) = \frac{\theta_3^2(\tau/q) + \theta_4^2(\tau/q)}{2 \theta_3(0/q^2)} = \frac{\theta_2^2(\tau/q) + \theta_1^2(\tau/q)}{2 \theta_2(0/q^2)}$$

$$(101) \quad \theta_4(2\tau/q^2) = \frac{\theta_3(\tau/q) \theta_4(\tau/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

Les formules de la transformation de LANDEN nous permettent de calculer les fonctions thêta pour la valeur $1/4$ de la variable. Nous avons en effet dans la formule (81) :

$$\theta_4(1/4/q) = \left\{ \theta_3(0/q^2) \theta_4(0/q^2) \right\}^{1/2}$$

soit :

$$(102) \quad \theta_4(1/4/q) = \left\{ \frac{1}{2} \left[\theta_3^2(0/q) + \theta_4^2(0/q) \right] \theta_3(0/q) \theta_4(0/q) \right\}^{1/2}$$

On vérifie aisément que :

$$(103) \quad \theta_3(1/4/q) = \theta_4(1/4/q)$$

De même, en reprenant la relation (82), il vient :

$$\begin{aligned}
 \theta_1 (1/4/q) &= \left\{ \frac{\theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q)}{\theta_2^2(0/q)} \right\}^{1/2} \theta_4 (1/4/q) \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{\theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q)}{\theta_3^2(0/q) + \theta_4^2(0/q)} \left[\theta_3^2(0/q) + \theta_4^2(0/q) \right] \theta_3(0/q) \theta_4(0/q) \right\}^{1/4} \\
 (104) \quad &= \left\{ \frac{1}{2} \left[\theta_3^2(0/q) - \theta_4^2(0/q) \right] \theta_3(0/q) \theta_4(0/q) \right\}^{1/4}.
 \end{aligned}$$

On vérifie que :

$$(105) \quad \theta_2 (1/4/q) = \theta_1 (1/4/q)$$

2,13 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES VERIFIEES PAR LES QUOTIENS DES FONCTIONS THETA

Nous nous proposons dans ce qui suit, de déterminer trois équations différentielles, satisfaites par chacun des quotients suivants :

$$(106) \quad v(v) = \frac{\theta_1(v/q)}{\theta_4(v/q)} \quad ; \quad \xi(v) = \frac{\theta_2(v/q)}{\theta_4(v/q)} \quad ; \quad \eta(v) = \frac{\theta_3(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

Considérons d'abord le quotient $v(v)$: ses multiplicateurs exponentiels, associés aux périodes 1 et τ sont -1 et +1. Sa dérivée :

$$(107) \quad v'(v) = \frac{\theta_1'(v/q) \theta_4(v/q) - \theta_1(v/q) \theta_4'(v/q)}{\theta_4^2(v/q)}$$

admet aussi les mêmes multiplicateurs -1 et +1, associés aux périodes 1 et τ .

Nous allons donner une autre définition de $v'(v)$ qui fait intervenir la fonction $\chi(v)$ définie par :

$$(108) \quad \chi(v) = \frac{\theta_2(v/q) \theta_3(v/q)}{\theta_4^2(v/q)}$$

Les multiplicateurs exponentiels de $\chi(v)$ sont -1 et +1, associés aux périodes 1 et τ .

Le rapport $\Phi(v)$ de la fonction $v'(v)$ par la fonction $\chi(v)$ s'écrit :

$$\Phi(v) = \frac{\theta'_1(v/q) \theta_4(v/q) - \theta_1(v/q) \theta'_4(v/q)}{\theta_2(v/q) \theta_3(v/q)}$$

Il est doublement périodique, de périodes 1 et τ , et il a des pôles d'ordre 1, seulement aux zéros de $\theta_2(v/q)$ et $\theta_3(v/q)$ pour lesquels :

$$\begin{cases} v = m/2 \\ v = m/2 + \frac{n}{2} \tau \end{cases} \quad m \text{ et } n \text{ entiers}$$

Le calcul de $\Phi(v + \tau/2)$ montre que

$$(109) \quad \Phi(v + \tau/2) = \Phi(v)$$

en effet,

$$\begin{aligned} \Phi(\tau + \tau/2) &= \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\theta_1(\tau + \tau/2/q)}{\theta_4(\tau + \tau/2/q)} \right\} \frac{\theta_4^2(\tau + \tau/2/q)}{\theta_2(\tau + \tau/2/q) \theta_3(\tau + \tau/2/q)} \\ &= \frac{i M(\tau) \theta'_4(\tau/q) - i M(\tau) \theta_1(\tau/q) - i \pi(\tau) \theta'_1(\tau/q) - i M(\tau) \theta_4(\tau/q)}{M(\tau) \theta_3(\tau/q) - M(\tau) \theta_2(\tau/q)} \\ &= \frac{\theta'_1(\tau/q) \theta_4(\tau/q) - \theta'_4(\tau/q) \theta_1(\tau/q)}{\theta_3(\tau/q) - \theta_2(\tau/q)} \\ &= \Phi(\tau) \end{aligned}$$

Les deux périodes de $\Phi(v)$ sont en réalité 1 et $\tau/2$. A l'intérieur d'un parallélogramme des périodes, $\Phi(v)$ n'admet qu'un pôle d'ordre 1 au point $v = 1/2$. Il résulte par application du théorème 1,2,1 que $\Phi(v)$ se réduit à une constante C. Cette constante C est calculée en faisant v égal à zéro :

$$(110) \quad C = \Phi(0) = \frac{\theta'_1(0) \cdot \theta_4(0)}{\theta_2(0) \cdot \theta_3(0)} = \pi \theta_4^2(0)$$

La dérivée $v'(v)$ a donc pour expression :

$$(111) \quad \frac{d}{d\tau} \left[\nu(\tau) \right] = \pi \theta_4^2(0/q) \frac{\theta_2(\tau/q) \theta_3(\tau/q)}{\theta_4^2(\tau/q)}$$

Elevons au carré l'expression (108) ; puis remplaçons les carrés par les relations du § 2,11, il vient :

$$(112) \quad \left\{ \frac{d\nu}{d\tau} \right\}^2 = \pi^2 \frac{\theta_4^2(0/q) \theta_2^2(\tau/q) \cdot \theta_4^2(0/q) \theta_3^2(\tau/q)}{\theta_4^4(\tau/q)}$$

$$= \frac{\pi^2}{\theta_4^4(\tau/q)} \left\{ \theta_4^2(\tau/q) \theta_2^2 - \theta_1^2(\tau/q) \theta_3^2 \right\} \left\{ \theta_4^2(\tau/q) \theta_3^2 - \theta_1^2(\tau/q) \theta_2^2 \right\}$$

$$= \pi^2 \left\{ \theta_2^2(0/q) - \nu^2 \theta_3^2(0/q) \right\} \left\{ \theta_3^2(0/q) - \nu^2 \theta_2^2(0/q) \right\}$$

qui est l'équation différentielle cherchée.

Deux raisonnements analogues, avec les quotients $\xi(v)$ et $\eta(v)$, conduisent aux résultats suivants :

$$(113) \quad \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\theta_2(\tau/q)}{\theta_4(\tau/q)} \right\} = -\pi \theta_3^2(0/q) \frac{\theta_1(\tau/q) \theta_3(\tau/q)}{\theta_4^2(\tau/q)}$$

$$(114) \quad \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\theta_3(\tau/q)}{\theta_4(\tau/q)} \right\} = -\pi \theta_2^2(0/q) \frac{\theta_1(\tau/q) \theta_2(\tau/q)}{\theta_4^2(\tau/q)}$$

$$(115) \quad \left\{ \frac{d\xi}{d\tau} \right\}^2 = \pi^2 \left\{ \theta_2^2 - \theta_4^2 \xi^2 \right\} \left\{ \theta_4^2 + \theta_2^2 \xi^2 \right\}$$

$$(116) \quad \left\{ \frac{d\eta}{d\tau} \right\}^2 = \pi^2 \left\{ \theta_3^2 - \theta_4^2 \eta^2 \right\} \left\{ \theta_3^2 \eta^2 - \theta_4^2 \right\}$$

2,14 - DEVELOPPEMENTS EN SERIE DE FOURIER

Considérons la dérivée logarithmique de la fonction $\theta_3(v/q)$

$$\frac{d}{dv} [\log_m \theta_3(v/q)] = \frac{\theta'_3(v/q)}{\theta_3(v/q)}$$

Elle est impaire, simplement périodique, de période 1. Elle admet le développement en série de FOURIER de la forme :

$$(117) \quad \frac{\theta'_3(v/q)}{\theta_3(v/q)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi v$$

où b_n est donné par l'intégrale :

$$(118) \quad b_n = 2 \int_0^1 \frac{\theta'_3(v/q)}{\theta_3(v/q)} \sin 2n\pi v dv$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$b_n = 2 \int_0^1 \frac{\theta'_3(v/q)}{\theta_3(v/q)} \left\{ \frac{e^{2in\pi v} - e^{-2in\pi v}}{2i} \right\} dv$$

Le calcul de l'intégrale de la forme :

$$J_N = \int_0^1 \frac{\theta'_3(v/q)}{\theta_3(v/q)} e^{2iN\pi v} dv \quad N = \pm m$$

peut se faire par la méthode des résidus le long du contour fermé $\mathcal{C}$ représenté par le parallélogramme des périodes de sommet 0 ; 1 ; 1 + τ ; τ . La fonction $\theta_3(v/q)$ admet pour zéro simple, à l'intérieur du domaine, le point $1/2 + \tau/2$. D'après le théorème des résidus, on a :

$$(119) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\theta'_3(v/q)}{\theta_3(v/q)} e^{2iN\pi v} dv = e^{2iN\pi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} \right\}} \\ = (-1)^N q^N$$

L'intégration le long du contour $\mathcal{C}$ peut se décomposer en quatre intégrales :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2i\eta} \int_{\mathcal{C}} \frac{\theta'_3(\tau/q)}{\theta_3(\tau/q)} e^{2i\eta N \tau} d\tau &= \frac{1}{2i\eta} \left\{ \int_0^1 + \int_1^{1+z} + \int_{1+z}^z + \int_z^0 \right\} \frac{\theta'_3(\tau/q)}{\theta_3(\tau/q)} e^{2i\eta N \tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{2i\eta} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\theta'_3(\tau/q)}{\theta_3(\tau/q)} e^{2i\eta N \tau} - \frac{\theta'_3(\tau+z/q)}{\theta_3(\tau+z/q)} e^{2i\eta N(\tau+z)} \right] d\tau \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^z \left[\frac{\theta'_3(\tau/q)}{\theta_3(\tau/q)} e^{2i\eta N \tau} - \frac{\theta'_3(\tau+1/q)}{\theta_3(\tau+1/q)} e^{2i\eta N(\tau+1)} \right] d\tau \right\} \\
 &= (1-q^{2N}) \frac{1}{2i\eta} \int_0^1 \frac{\theta'_3(\tau/q)}{\theta_3(\tau/q)} e^{2i\eta N \tau} d\tau + \frac{2i\eta q^{2N}}{2i\eta} \int_0^1 e^{2i\eta N \tau} d\tau \\
 &= (1-q^{2N}) \frac{1}{2i\eta} \int_0^1 \frac{\theta'_3(\tau/q)}{\theta_3(\tau/q)} e^{2i\eta N \tau} d\tau
 \end{aligned}$$

D'où : $J_N = (-1)^N 2i\pi \frac{q^N}{1-q^{2N}}$

et par suite :

$$J_n = (-1)^n 2i\pi \frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

$$J_{-n} = (-1)^n 2i\pi \frac{q^{-n}}{1-q^{-2n}} = -J_n$$

Le coefficient b_n s'écrit :

$$(120) \quad b_n = (-1)^n 4\pi \frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

et par conséquent :

$$(121) \quad \frac{\theta'_3(\tau/q)}{\theta_3(\tau/q)} = 4\pi \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi\tau.$$

Les développements des autres fonctions thêta peuvent se calculer de la même manière.

$$(122) \quad \frac{\theta'_1(\tau/q)}{\theta_1(\tau/q)} = \pi \cotg \pi\tau + 4\pi \sum_1^{\infty} \frac{q^{2n} \sin 2n\pi\tau}{1-q^{2n}}$$

$$(123) \quad \frac{\theta'_2(\tau/q)}{\theta_2(\tau/q)} = -\pi \tga \pi\tau + 4\pi \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n} \sin n\pi\tau}{1-q^{2n}}$$

$$(124) \quad \frac{\theta'_3(\tau/q)}{\theta_3(\tau/q)} = 4\pi \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n q^n \sin 2n\pi\tau}{1-q^{2n}}$$

$$(125) \quad \frac{\theta'_4(\tau/q)}{\theta_4(\tau/q)} = 4\pi \sum_1^{\infty} \frac{q^n \sin n\pi\tau}{1-q^{2n}}$$

L'intégration terme à terme des quatre séries précédentes donne les développements du logarithme des quatre fonctions thêta :

$$(126) \quad \log \left\{ \pi \frac{\theta_1(\tau/q)}{\theta'_1(0/q)} \right\} = \log (\sin \pi\tau) + 4 \sum_1^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \frac{\sin^2 n\pi\tau}{n}$$

$$(127) \quad \log \left\{ \frac{\theta_2(\tau/q)}{\theta_2(0/q)} \right\} = \log (\cos \pi\tau) + 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{1-q^{2n}} \frac{\sin^2 n\pi\tau}{n}$$

$$(128) \quad \log \left\{ \frac{\theta_3(\tau/q)}{\theta_3(0/q)} \right\} = 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1-q^{2n}} \frac{\sin^2 n\pi\tau}{n}$$

$$(129) \quad \log \left\{ \frac{\theta_4(\tau/q)}{\theta_4(0/q)} \right\} = 4 \sum_1^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \frac{\sin^2 n\pi\tau}{n}$$

Et de ces dernières formules on en déduit :

$$(130) \quad \frac{1}{2} \log \left| \frac{\theta_1(r+w)}{\theta_1(r-w)} \right| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin \pi(r+w)}{\sin \pi(r-w)} \right| + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi r \sin 2n\pi w$$

$$(131) \quad \frac{1}{2} \log \left| \frac{\theta_2(r+w)}{\theta_2(r-w)} \right| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos \pi(r+w)}{\cos \pi(r-w)} \right| + 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi r \sin 2n\pi w$$

$$(132) \quad \frac{1}{2} \log \left| \frac{\theta_3(r+w)}{\theta_3(r-w)} \right| = 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi r \sin 2n\pi w$$

$$(133) \quad \frac{1}{2} \log \left| \frac{\theta_4(r+w)}{\theta_4(r-w)} \right| = 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi r \sin 2n\pi w$$

2,15 - FORMULE D'HERMITE

Une formule générale de définition des fonctions thêta a été donnée par HERMITE. Elle fait intervenir deux coefficients μ et ν qui prennent des valeurs particulières pour θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 ; elle prend la forme d'une série absolument et uniformément convergente.

$$(134) \quad \Theta_{\mu; \nu}(r|q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\left\{ 2i\pi r \left(m + \frac{\nu}{2}\right) + i\pi r \left(m + \frac{\nu}{2}\right)^2 + i\pi m \nu \right\}}$$

Dans les cas particuliers de la présente étude, nous avons les égalités :

$$\begin{aligned} \theta_1(v) &= -i \quad \theta_{11}(v) \\ \theta_2(v) &= \quad \theta_{10}(v) \\ \theta_3(v) &= \quad \theta_{00}(v) \\ \theta_4(v) &= \quad \theta_{01}(v) \end{aligned}$$

Remarque : Nous donnons ci-après le tableau qui résume les notations des fonctions thêta, adoptées par différents auteurs.

$\theta_1(v/q)$	$\theta_2(v/q)$	$\theta_3(v/q)$	$\theta_4(v/q)$	BATEMAN Manuscript Project
$H(2Kv)$	$H_1(2Kv)$	$\theta_1(2Kv)$	$\theta(2Kv)$	JACOBI
$\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_0(v)$	WEIERSTRASS - HALPHEN - HALP HANCOCK
$\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$	JAHNKE - EMDE - LOSCH EINAR HILLE TANNERY et MOLK
$\theta_1(\omega v)$	$\theta_2(\omega v)$	$\theta_3(\omega v)$	$\theta_4(\omega v)$	BRIOT et BOUQUET $\omega = 2K$
$\vartheta_1(z)$	$\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$	WHITTAKER et WATSON $z = \pi v$ MAHADEV DUTTA et LOKENATH DEBNATH

Tableau 3

C H A P I T R E 3

-:-:-

F O N C T I O N S D E J A C O B I

3,1 - DEFINITION -

Considérons le rapport $v(v)$ des deux fonctions $\theta_1(v/q)$ et $\theta_4(v/q)$

$$v(v) = \frac{\theta_1(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

Nous avons déjà remarqué au § 2,13, d'une part que les multiplicateurs correspondants aux périodes 1 et τ sont -1 et $+1$, ce qui nous permet de dire que les périodes de la fonction $v(v)$ sont 2 et τ ; d'autre part $v(v)$ est solution de l'équation différentielle :

$$(1) \quad \left| \frac{dv}{dv} \right|^2 = \pi^2 \left\{ \theta_2^2(o/q) - v^2 \theta_3^2(o/q) \right\} \left\{ \theta_3^2(o/q) - v^2 \theta_2^2(o/q) \right\}$$

Cette équation (1) s'écrit après le changement de variable

$$(2) \quad y = \frac{\theta_3(o/q)}{\theta_2(o/q)} \cdot v(v) :$$

$$\frac{\theta_2^2(o/q)}{\theta_3^2(o/q)} \left| \frac{dy}{dv} \right|^2 = \pi^2 \theta_2^2(o/q) \theta_3^2(o/q) \left(1-y^2 \right) \left(1 - \frac{\theta_2^4(o/q)}{\theta_3^4(o/q)} y^2 \right)$$

Posons :

$$(3) \quad u = \pi \theta_3^2 (o/q) v$$

$$(4) \quad k = \left| \frac{\theta_2 (o/q)}{\theta_3 (o/q)} \right|^2$$

l'équation différentielle (2) prend alors la forme :

$$(5) \quad \left| \frac{dy}{du} \right|^2 = (1 - y^2) (1 - k^2 y^2)$$

La solution y , exprimée en fonction de u , s'écrit :

$$(6) \quad y = \frac{\theta_3 (o/q)}{\theta_2 (o/q)} \cdot \frac{\theta_1 (u/\pi \theta_3^2 (o/q)/q)}{\theta_4 (u/\pi \theta_3^2 (o/q)/q)}$$

En séparant les variables dans l'équation (3), on obtient :

$$(7) \quad du = \left[\frac{1}{(1-y^2) (1-k^2 y^2)} \right]^{1/2} dy$$

ce qui donne, en intégrant de 0 à y :

$$(8) \quad u (y/h) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) (1-k^2 t^2)}}$$

$u (y/k)$ est une intégrale elliptique de première espèce.

On peut donc dire que y représente l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce $u (y/k)$. JACOBI a été le premier à donner le nom de "*sinus amplitudinis*" à la fonction y ; il a posé :

$$(9) \quad y = \operatorname{sn} (u ; k)$$

Le coefficient k représente le module de l'intégrale elliptique : il est relié au paramètre q des fonctions thêta par la formule (4). La détermination de q connaissant le module k sera donnée au paragraphe 4,6.

Reprenons l'intégrale elliptique de première espèce $u(y/k)$ de la formule (8). Pour $y = 1$, on a :

$$(10) \quad u(1; k) = K(k)$$

$K(k)$ ou, en abrégé K , désignant l'intégrale elliptique complète de première espèce relative au module k .

Donnons à y la valeur 1 dans l'expression (2), l'équation est vérifiée pour v égal à $1/2$. Reportons alors dans la formule (3) les valeurs respectives de u et v correspondant à $y = 1$; on obtient une expression de l'intégrale elliptique complète et de première espèce à partir des fonctions θ , soit :

$$(11) \quad K = \frac{\pi}{2} \theta_3^2(o/q)$$

Nous avons en définitive :

$$(12) \quad \operatorname{sn}(u : k) = \frac{\theta_3(o/q)}{\theta_2(o/q)} \cdot \frac{\theta_1(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

avec :

$$v = \frac{u}{2K}$$

On définit d'une manière analogue les fonctions $\operatorname{cn}(u : k)$; $\operatorname{dn}(u : k)$ à partir des rapports :

$$\xi(v) = \frac{\theta_2(v/q)}{\theta_4(v/q)} \quad ; \quad \eta(v) = \frac{\theta_3(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

en posant :

$$(13) \quad \operatorname{cn}(u; k) = \frac{\theta_4(o/q)}{\theta_2(o/q)} \cdot \frac{\theta_2(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

$$(14) \quad \operatorname{dn}(u; k) = \frac{\theta_4(o/q)}{\theta_3(o/q)} \cdot \frac{\theta_3(v/q)}{\theta_4(v/q)} \quad v = \frac{u}{2K}$$

Ces fonctions sont respectivement solution des équations différentielles suivantes, qui se déduisent directement des équations (115) et (116) du Chapitre 2.

$$(15) \quad \frac{dy}{du}^2 = (1 - y^2)(k'^2 + k^2 y^2)$$

$$(16) \quad \frac{dy}{du}^2 = (1 - y^2) (y^2 - k'^2)$$

dans lesquelles $k' = \sqrt{1 - k^2}$ désigne le module complémentaire du module k .

L'expression de k' à partir des fonctions $\theta_j (o)$ est :

$$(17) \quad k' = \left\{ \frac{\theta_4 (o/q)}{\theta_3 (o/q)} \right\}^2$$

Remarque : Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la définition du module k , nous adopterons la notation :

$$\operatorname{sn} (u, k) = \operatorname{sn} (u)$$

$$\operatorname{cn} (u, k) = \operatorname{cn} (u)$$

$$\operatorname{dn} (u, k) = \operatorname{dn} (u)$$

3,2 - PROPRIETES DES FONCTIONS DE JACOBI -

a - Périodes - Zéros - Pôles et Résidus

Les périodes de la fonction $\operatorname{sn} (u, k)$ sont celles du rapport $v (v)$ du § 3,1, soit :

$$(18) \quad \begin{array}{ll} v = 2 & \text{ou} \quad u = 4K \\ v = \tau & \text{ou} \quad u = 2iK' \end{array} ,$$

les zéros sont ceux de la fonction $\theta_1 (v/q)$:

$$(19) \quad v = m + n \tau \quad \text{ou} \quad u = 2 m K + 2 n i K' ,$$

et les pôles correspondent aux zéros de la fonction $\theta_4 (v/q)$:

$$(20) \quad v = m + (n+1/2)\tau \quad \text{ou} \quad u = 2mK + (2n+1) iK'$$

Le calcul du résidu de $\operatorname{sn} (u, k)$ au pôle iK' peut se faire comme suit :

$$\text{résidu } \operatorname{sn} (u, k) = \lim_{u \rightarrow iK'} (u - iK') \frac{\theta_3}{\theta_2} \cdot \frac{\theta_1 (v/q)}{\theta_4 (v/q)}$$

Faisons le changement de variable :

$$u' = u - iK' \quad ; \quad v' = \frac{u}{2K} - \frac{iK'}{2K} = v - \tau/2$$

$$\text{résidu de sn (u,k)} = \lim_{u \rightarrow 0} u' \frac{\theta_3}{\theta_2} \frac{\theta_1 (v' + \tau/2/q)}{\theta_4 (v' + \tau/2/q)}$$

$$= \frac{\theta_3}{\theta_2} \theta_1(\tau/2) \lim_{v' \rightarrow 0} \frac{1}{iM(v')} \frac{2Kv'}{\theta_1 (v'/q)}$$

$$= \frac{\theta_3}{\theta_2} \frac{iM(o)}{iM(o)} \theta_4(o) \frac{\pi \theta_3^2}{\theta_1'(o)}$$

$$(21) \quad = \frac{\theta_3^2}{\theta_2^2} = \frac{1}{k}$$

Les périodes, les zéros, les pôles et les résidus des autres fonctions $cn (u,k)$ et $dn (u,k)$ sont obtenus de la même manière.

Le Tableau 4 résume les résultats :

	:	:	:	:
	sn (u,k)	cn (u,k)	dn (u,k)	:
-----	-----	-----	-----	-----
: Périodes :	4K ; 2iK'	4K ; 2K + 2iK'	2K ; 4iK'	:
-----	-----	-----	-----	-----
: Zéros :	2mK + 2niK'	(2m+1)K + 2niK'	(2m+1)K + (2n+1)iK'	:
-----	-----	-----	-----	-----
: Pôles :	2mK + (2n+1)iK'	2mK + (2n+1)iK'	2mK + (2n+1)iK'	:
-----	-----	-----	-----	-----
: Résidus :	(-1) ^m /k	(-1) ^{n+m} /ik	(-1) ⁿ⁺¹ i	:
:	:	:	:	::

Tableau 4

Remarque : Les fonctions de JACOBI sont des fonctions elliptiques d'ordre deux ; elles possèdent en effet deux pôles simples à l'intérieur du parallélogramme élémentaire construit sur leurs propres périodes.

On peut construire des fonctions elliptiques admettant pour périodes 2K et 2iK', en prenant une fonction rationnelle des deux fonctions $sn^2 (u,k)$, et $sn (u,k) \cdot cn (u,k) \cdot dn (u,k)$.

b - Formules de changements d'argument

Pour établir les propriétés relatives aux changements d'argument dans les fonctions de JACOBI, il suffit de se reporter aux formules de changements d'argument relatives aux fonctions θ_j du Tableau 1.

Les résultats sont consignés dans les Tableaux 5a, 5b, 5c, dans lesquels nous avons adopté les notations :

$$s = \operatorname{sn} (u ; k) \quad ; \quad c = \operatorname{cn} (u ; k) \quad ; \quad d = \operatorname{dn} (u ; k)$$

c - Valeurs particulières des fonctions de JACOBI

Les valeurs des fonctions de JACOBI, données par les Tableaux 6a, 6b, 6c, sont obtenues en explicitant les fonctions θ_j , intervenant dans la définition de $\operatorname{sn} (u ; k)$, $\operatorname{cn} (u ; k)$ et $\operatorname{dn} (u ; k)$ pour des valeurs remarquables de v . Les développements de θ_j sont, soit donnés précédemment, par exemple pour $v = 1/2 ; \tau/2$ et $1/4$, soit déduits de la transformation de JACOBI, pour $v = \tau/4$, ou de la transformation de LANDEN, pour $v = 1/4 + \tau/4$.

3,3 - RELATIONS ENTRE LES CARRES DES FONCTIONS DE JACOBI -

Reportons nous à la formule (43) du Chapitre 2 , on peut l'écrire :

$$\frac{\theta_3^2(0/q)}{\theta_2^2(0/q)} \frac{\theta_1^2(\tau/q)}{\theta_4^2(\tau/q)} + \frac{\theta_4^2(0/q)}{\theta_2^2(0/q)} \frac{\theta_2^2(\tau/q)}{\theta_4^2(\tau/q)} = 1.$$

soit, d'après la définition même des fonctions $\operatorname{sn} (u ; k)$ et $\operatorname{cn} (u ; k)$ de JACOBI :

$$(22) \quad \operatorname{sn}^2 (u ; k) + \operatorname{cn}^2 (u ; k) = 1$$

La formule (43) peut aussi se mettre sous la forme :

$$\frac{\theta_4^2(0/q)}{\theta_3^2(0/q)} \frac{\theta_2^2(\tau/q)}{\theta_4^2(\tau/q)} = 1 - \frac{\theta_2^2(0/q)}{\theta_3^2(0/q)} \frac{\theta_1^2(\tau/q)}{\theta_4^2(\tau/q)}$$

Tableau 5 a

$$\operatorname{sn}(mK + niK' \pm u)$$

$\begin{matrix} mK \\ \backslash \\ niK' \end{matrix}$	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$-iK'$	$-d/kc$	$\pm 1/ks$	d/kc	$\mp 1/ks$	$-d/kc$
0	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$
iK'	$-d/kc$	$\pm 1/ks$	d/kc	$\mp 1/ks$	$-d/kc$
$2iK'$	$-c/d$	$\pm s$	c/d	$\mp s$	$-c/d$

Tableau 5 b

$$\operatorname{cn}(mK + niK' \pm u)$$

$\begin{matrix} mK \\ \backslash \\ niK' \end{matrix}$	$-K$	0	K	$2K$	$3K$
$-iK'$	$-ik'/kc$	$\pm id/ks$	ik'/kc	$\mp id/ks$	$-ik'/kc$
0	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$
iK'	ik'/kc	$\mp id/ks$	$-ik'/kc$	$\pm id/ks$	ik'/kc
$2iK'$	$\mp k's/d$	$-c$	$\pm k's/d$	c	$\mp k's/d$

Tableau 5 c

$$\operatorname{dn}(mK + niK' \pm u)$$

$\begin{matrix} mK \\ \backslash \\ niK' \end{matrix}$	$-K$	0	K	$2K$
$-iK'$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$
0	k'/d	d	k'/d	d
iK'	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$	$\pm ik's/c$	$\mp ic/s$
$2iK'$	$-k'/d$	$-d$	$-k'/d$	$-d$
$3iK'$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$	$\mp ik's/c$	$\pm ic/s$

Tableau 6 a

$$\operatorname{sn} \left(\frac{1}{2} m K + \frac{1}{2} n i K' \right)$$

$\frac{1}{2} m K \backslash \frac{1}{2} n i K'$	0	$\frac{1}{2} K$	K	$\frac{3}{2} K$
0	0	$(1+k)^{-1/2}$	1	$(1+k')^{1/2}$
$\frac{1}{2} i K'$	$i k^{-1/2}$	$2k^{-1/2} [(1+k)^{1/2} + i(1-k)^{1/2}]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2} [(1+k)^{1/2} - i(1-k)^{1/2}]$
$i K'$	∞	$(1-k')^{-1/2}$	k^{-1}	$(1-k)^{-1/2}$
$\frac{3}{2} i K'$	$-i k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2} [(1-k)^{1/2} - i(1+k)^{1/2}]$	$k^{-1/2}$	$(2k)^{-1/2} [(1+k)^{1/2} + i(1-k)^{1/2}]$

Tableau 6 b

$$\operatorname{cn} \left(\frac{1}{2} m K + \frac{1}{2} n i K' \right)$$

$\frac{1}{2} m K \backslash \frac{1}{2} n i K'$	0	$\frac{1}{2} K$	K	$\frac{3}{2} K$
0	1	$k'^{1/2} [1+k']^{-1/2}$	0	$-k'^{1/2} (1+k')^{-1/2}$
$\frac{1}{2} i K'$	$k^{-1/2} (1+k)^{1/2}$	$k'^{1/2} (2k)^{-1/2} (1-i)$	$-i k^{-1/2} (1-k)^{1/2}$	$-k'^{1/2} (2k)^{-1/2} (1+i)$
$i K'$	∞	$-i k'^{1/2} (1-k')^{-1/2}$	$-i k^{-1} k'$	$-i k'^{1/2} (1-k')^{-1/2}$
$\frac{3}{2} i K'$	$-k^{-1/2} (1+k)^{1/2}$	$-k'^{1/2} (2k)^{-1/2} (1+i)$	$-i k^{-1/2} (1-k)^{1/2}$	$k'^{1/2} (2k)^{-1/2} (1-i)$

Tableau 6 c

$$\operatorname{dn} \left(\frac{1}{2} m K + \frac{1}{2} n i K' \right)$$

$\frac{1}{2} m K \backslash \frac{1}{2} n i K'$	0	$\frac{1}{2} K$	K	$\frac{3}{2} K$
0	1	$k'^{1/2}$	k'	$k'^{1/2}$
$\frac{1}{2} i K'$	$(1+k)^{1/2}$	$\frac{1}{2} k'^{1/2} [(1+k')^{1/2} - i(1-k')^{1/2}]$	$(1-k)^{1/2}$	$\frac{1}{2} k'^{1/2} [(1+k')^{1/2} + i(1-k')^{1/2}]$
$i K'$	∞	$-i k'^{1/2}$	0	$i k'^{1/2}$
$\frac{3}{2} i K'$	$-(1+k)^{1/2}$	$-\frac{1}{2} k'^{1/2} [(1+k')^{1/2} + i(1-k')^{1/2}]$	$-(1-k)^{1/2}$	$-\frac{1}{2} k'^{1/2} [(1+k')^{1/2} - i(1-k')^{1/2}]$

$$\frac{\theta_4^2(0/q)}{\theta_3^2(0/q)} \frac{\theta_3^2(r/q)}{\theta_4^2(r/q)} = 1 - \frac{\theta_3^2(0/q)}{\theta_2^2(0/q)} \frac{\theta_2^4(0/q)}{\theta_3^4(0/q)} \frac{\theta_1^2(r/q)}{\theta_4^2(r/q)}$$

Compte tenu de la définition de $\text{sn}(u; k)$ et $\text{dn}(u; k)$ et de la relation (4) de définition de k :

$$(23) \quad \text{dn}^2(u; k) = 1 - k^2 \text{sn}^2(u; k)$$

Les formules (22) et (23) permettent de déduire les deux autres relations suivantes :

$$(24) \quad \text{dn}^2(u; k) - k^2 \text{cn}^2(u; k) = k'^2$$

$$(25) \quad \text{cn}^2(u; k) + k'^2 \text{sn}^2(u; k) = \text{dn}^2(u; k)$$

3,4 - FORMULES D'ADDITION DES FONCTIONS DE JACOBI -

Considérons les deux fonctions

$$\begin{aligned} &\text{sn}(u; k) \cdot \text{sn}(u - a; k) \\ &\text{cn}(u; k) \cdot \text{cn}(u - a; k) - \text{cn}(a; k) \end{aligned}$$

dans lesquelles a est une constante. Nous poserons $\alpha = a/2K$

Ces deux fonctions sont doublement périodiques, de périodes $2K$ et $2iK'$ et elles possèdent deux pôles simples correspondants aux zéros du produit $\theta_4(v/q) \cdot \theta_4(v - \alpha/q)$. Ce sont des fonctions elliptiques du second ordre qui ne diffèrent donc que par une constante A :

$$(26) \quad A \text{sn}(u; k) \text{sn}(u - a; k) = \text{cn}(u; k) \text{cn}(u - a; k) - \text{cn}(a; k)$$

Le calcul de A se fait en posant $u = K$ dans l'expression (26) :

$$A \text{sn}(K - a; k) = - \text{cn}(a; k)$$

$$A = - \text{dn}(a; k)$$

L'équation (26) s'écrit alors :

$$(27) \quad \text{cn}(a; k) = \text{cn}(u; k) \text{cn}(u-a; k) + \text{sn}(u; k) \text{sn}(u-a; k) \text{dn}(a; k)$$

En posant $a = -w$, puis en permutant u et w dans la relation (27), on obtient deux autres relations :

$$\text{cn}(w; k) = \text{cn}(u; k) \text{cn}(u+w; k) + \text{sn}(u; k) \text{dn}(w; k) \text{sn}(u+w; k)$$

$$\text{cn}(u; k) = \text{cn}(w; k) \text{cn}(w+u; k) + \text{sn}(w; k) \text{dn}(u; k) \text{sn}(w+u; k)$$

d'où l'on tire $\text{sn}(u+w; k)$

$$(28) \quad \text{sn}(u+w; k) = \frac{\text{cn}^2(u; k) - \text{cn}^2(w; k)}{\text{sn}(w; k) \text{cn}(u; k) \text{dn}(u; k) - \text{sn}(u; k) \text{cn}(w; k) \text{dn}(w; k)}$$

En multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur, il vient encore :

$$(29) \quad \text{sn}(u+w; k) = \frac{\text{sn}(u; k) \text{cn}(w; k) \text{dn}(u; k) + \text{sn}(w; k) \text{cn}(u; k) \text{dn}(u; k)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k) \text{sn}^2(w; k)}$$

Le calcul de $\text{cn}(u+w; k)$ et $\text{dn}(u+w; k)$ peut se faire de la même façon, et celui de $\text{sn}(u-w; k)$, $\text{cn}(u-w; k)$ et $\text{dn}(u-w; k)$ en faisant $-w$ au lieu de $+w$. On a ainsi :

$$(30) \quad \text{sn}(u-w; k) = \frac{\text{sn}(u; k) \text{cn}(w; k) \text{dn}(w; k) - \text{sn}(w; k) \text{cn}(u; k) \text{dn}(u; k)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k) \text{sn}^2(w; k)}$$

$$(31) \quad \text{cn}(u \pm w; k) = \frac{\text{cn}(u; k) \text{cn}(w; k) \mp \text{sn}(u; k) \text{sn}(w; k) \text{dn}(u; k) \text{dn}(w; k)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k) \text{sn}^2(w; k)}$$

$$(32) \quad \text{dn}(u \pm w; k) = \frac{\text{dn}(u; k) \text{dn}(w; k) \mp k^2 \text{sn}(u; k) \text{sn}(w; k) \text{cn}(u; k) \text{cn}(w; k)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k) \text{sn}^2(w; k)}$$

Les formules donnant les fonctions de JACOBI correspondant à l'argument $2u$ s'écrivent :

$$(33) \quad \text{sn}(2u; k) = \frac{2 \text{sn}(u; k) \text{cn}(u; k) \text{dn}(u; k)}{1 - k^2 \text{sn}^4(u; k)}$$

$$(34) \quad \text{cn} (2u ; k) = \frac{\text{cn}^2 (u;k) - \text{sn}^2 (u;k) \text{dn}^2 (u;k)}{1 - k^2 \text{sn}^4 (u;k)}$$

$$(35) \quad \text{dn} (2u ; k) = \frac{\text{dn}^2 (u;k) - k^2 \text{sn}^2 (u;k) \text{cn}^2 (u;k)}{1 - k^2 \text{sn}^4 (u;k)}$$

On en déduit les formules suivantes qui expriment les fonctions de JACOBI en fonction de l'argument double :

$$\text{sn}^2 (u ; k) = \frac{1 - \text{cn} (2u;k)}{1 + \text{dn} (2u;k)} \quad \text{cn}^2 (u ; k) = \frac{\text{cn} (2u;k) + \text{dn} (2u;k)}{1 + \text{dn} (2u;k)}$$

$$(36) \quad \text{dn}^2 (u ; k) = \frac{\text{dn} (2u;k) + k^2 \text{cn} (2u;k) + k'^2}{1 + \text{dn} (2u;k)}$$

3,5 - DERIVEE DES FONCTIONS DE JACOBI -

La définition de la dérivée de la fonction $\text{sn} (u)$ s'écrit :

$$\left(\text{sn} (u) \right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sn} (u+h) - \text{sn} (u)}{h}$$

A partir des formules d'addition, on a :

$$\text{sn} (u+w) - \text{sn} (u-w) = \frac{2 \text{sn} (w) \text{cn} (u) \text{dn} (u)}{1 - k^2 \text{sn}^2 (u) \text{sn}^2 (w)}$$

et en remplaçant u par $u + h/2$ et w par $h/2$, la dérivée s'écrit :

$$\frac{d}{du} \text{sn} (u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \frac{\text{cn} (u+h/2) \text{dn} (u+h/2)}{1 - k^2 \text{sn}^2 \frac{h}{2} \text{sn}^2 (u+\frac{h}{2})}$$

$$\frac{d}{du} \text{sn} (u) = \text{cn} (u) \cdot \text{dn} (u) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sn} h/2}{h/2}$$

Exprimons $\text{sn}(h/2)$ par les fonctions θ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sn } h/2}{h/2} = \frac{\theta_3(0/q)}{\theta_2(0/q)} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta_1(h/4k/q)}{\theta_4(h/4k/q)} \cdot \frac{2}{h}$$

Nous avons étudié au § 2,1 la limite de $H(u)/u$ quand u tend vers zéro.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sn } h/2}{h/2} &= \frac{\theta_3(0/q)}{\theta_2(0/q)} \frac{1}{\theta_4(0/q)} \lim_{h \rightarrow 0} \theta_1(h/4k/q) \cdot \frac{2}{h} \\ &= \frac{\theta_3(0/q)}{\theta_2(0/q)} \frac{1}{\theta_4(0/q)} \frac{1}{2k} \theta_1'(0/q) \\ &= \frac{\pi \theta_3^2(0/q)}{2k} = 1 \end{aligned}$$

La dérivée de $\text{sn}(u;k)$ s'écrit donc :

$$(37) \quad \frac{d}{du} \text{sn}(u;k) = \text{cn}(u;k) \cdot \text{dn}(u;k)$$

Les dérivées de $\text{cn}(u;k)$ et $\text{dn}(u;k)$ s'obtiennent immédiatement à partir des formules :

$$\begin{aligned} \text{cn}^2(u;k) &= 1 - \text{sn}^2(u;k) \\ \text{dn}^2(u;k) &= 1 - k^2 \text{sn}^2(u;k) \end{aligned}$$

$$(38) \quad \frac{d}{du} \text{cn}(u;k) = -\text{sn}(u;k) \text{dn}(u;k)$$

$$(39) \quad \frac{d}{du} \text{dn}(u;k) = -k^2 \text{sn}(u;k) \text{cn}(u;k)$$

3,6 - FONCTION $\text{Am}(u;k)$

Soit l'intégrale elliptique de 1ère espèce :

$$u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2 t^2)(1-t^2)}}$$

Faisons le changement de variable

$$(40) \quad t = \sin \phi$$

$$u = \int_0^{\text{Arc sin } t} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi$$

Dans ses travaux, JACOBI a considéré la valeur de la borne supérieure de l'intégrale elliptique comme une fonction de u . Il a posé pour définition de la fonction "amplitudinis".

$$(41) \quad \phi = \text{am } (u;k)$$

L'expression de t , en fonction de u , s'écrit :

$$(42) \quad \begin{aligned} t = \sin \phi &= \sin \{ \text{am } (u;k) \} \\ &= \text{sn } (u;k) \end{aligned}$$

Les autres fonctions de JACOBI se définissent alors par les équations :

$$(43) \quad \text{cn } (u;k) = \cos \phi = \cos | \text{am } (u;k) |$$

$$\text{dn } (u;k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 | \text{am } (u;k) |}$$

On peut remarquer que lorsque ϕ croît de 0 à $\pi/2$, u varie de 0 à K . La période de $\text{sn } (u;k)$ correspond à une variation de ϕ de 0 à 2π , c'est-à-dire de 0 à $4K$ pour u . On retrouve les résultats du § 3,2.

3,7 - CAS DE DEGENERESCENCE -

A partir de la définition du § 3,6 pour les fonctions $\text{sn } (u;k)$ $\text{cn } (u;k)$ et $\text{dn } (u;k)$ on déduit deux cas de dégénérescence :

a) pour $k = 0$, soit $k' = 1$, on a :

$$K = \frac{\pi}{2} \quad K' \rightarrow \infty$$

$$\text{sn } u = \sin u \quad \text{cn } u = \cos u \quad \text{dn } u = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} e^{i\pi\tau} = \frac{1}{16}$$

Tableau 7

$\begin{matrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{matrix}$	$\dot{u}$	$\dot{k}$	$\dot{k}'$	$\dot{K}$	$\dot{K}'$	$\dot{sn}(u; k)$	$\dot{cn}(u; k)$	$\dot{dn}(u; k)$
$\omega_1 + \omega_2$ ω_2	ku	$\frac{1}{k}$	$\frac{k'}{ik}$	$k(K + iK')$	kK'	$k \operatorname{sn}(u; k)$	$\operatorname{dn}(u; k)$	$\operatorname{cn}(u; k)$
ω^2 $-\omega_1$	iu	k'	k	K'	K	$i \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(u; k)}$	$\frac{\operatorname{dn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}$
ω_1 $\omega_1 + \omega_2$	$k'u$	$\frac{k}{ik'}$	$\frac{1}{k'}$	$k'K$	$k'(K - iK')$	$k' \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}(u; k)}$
ω^2 $-(\omega_1 + \omega_2)$	iku	$\frac{k'}{ik}$	$\frac{1}{k}$	kK'	$k(K + iK')$	$ik' \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$
$-(\omega_1 + \omega_2)$ $-\omega_1$	$ik'u$	$\frac{1}{k'}$	$\frac{k}{ik'}$	$k'(K' + iK)$	$k'K$	$-ik' \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}$	$\frac{\operatorname{dn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(u; k)}$
$2\omega_1$ ω_2	$(1+k')u$	$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$	$\frac{1+k'}{2} K$	$(1+k')K'$	$(1+k') \frac{\operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\frac{1-(1+k') \operatorname{sn}^2(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\frac{1-(1-k') \operatorname{sn}^2(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$
ω_1 $2\omega_2$	$(1+k)u$	$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$\frac{1-k}{1+k}$	$(1+k)K$	$\frac{1+k}{1} K'$	$\frac{(1+k) \operatorname{sn}(u; k)}{1+k \operatorname{sn}^2(u; k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k)}{1+k \operatorname{sn}^2(u; k)}$	$\frac{1-k \operatorname{sn}^2(u; k)}{1+k \operatorname{sn}^2(u; k)}$

b) pour $k = 1$, soit $k' = 0$, on a :

$$K \rightarrow \infty \quad K' = \pi/2$$

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{th} u \quad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u}$$

$$\lim_{k \rightarrow 1} \frac{1}{1-k^2} e^{-i\pi/\tau} = \frac{1}{16}$$

3,8 - TRANSFORMATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI -

Les expressions des transformées de fonctions de JACOBI, sont obtenues en appliquant les transformations sur les fonctions thêta qui servent à définir les fonctions sn , cn et dn .

Les résultats sont donnés par le Tableau 7.

Remarque : La transformation $\begin{pmatrix} 2\omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ est appelée transformation de LANDEN et

celle $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ 2\omega_2 \end{pmatrix}$ transformation de GAUSS.

3,9 - DEVELOPPEMENTS EN PRODUITS ET EN SERIE DES FONCTIONS DE JACOBI -

- Développements en produits infinis

Sachant que :

$$k = \frac{\theta_2^2(o/q)}{\theta_3^2(o/q)} \quad \text{et} \quad k' = \frac{\theta_4^2(o/q)}{\theta_3^2(o/q)}$$

les développements en produits infinis des fonctions de JACOBI sont :

$$(45) \quad \operatorname{sn}(u; k) = 2 q^{1/4} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \pi \tau \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 2q^{2n} \cos 2\pi \tau + q^{4n})}{(1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi \tau + q^{4n-2})}$$

$$(46) \quad \text{cn}(u; k) = 2 q^{1/4} \sqrt{\frac{k'}{k}} \cos \pi v \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 2 q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n})}{(1 - 2 q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2})}$$

$$(47) \quad \text{dn}(u; k) = \sqrt{k'} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 2 q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2})}{(1 - 2 q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2})}$$

- Développements en série de MAC LAURIN :

Ils sont obtenus en calculant les dérivées successives de chaque fonction pour $u = 0$:

$$(48) \quad \text{sn}(u; k) = u - (1+k^2) \frac{u^3}{3!} + (1+14k^2+k^4) \frac{u^5}{5!} \\ - (1+135k^2 + 135k^4 + k^6) \frac{u^7}{7!} + \dots$$

$$(49) \quad \text{cn}(u; k) = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1+4k^2) \frac{u^4}{4!} - (1+44k^2 + 16k^4) \frac{u^6}{6!} + \dots$$

$$(50) \quad \text{dn}(u; k) = 1 - k^2 \frac{u^2}{2!} + k^2 (k^2+4) \frac{u^4}{4!} - k^2 (k^4+44k^2+16) \frac{u^6}{6!} + \dots$$

- Développements en série de FOURIER

Considérons la fonction $\text{sn}(u; k)$. C'est une fonction impaire, de période $4K$, qui satisfait aux conditions de DIRICHLET dans la théorie des développements en série de FOURIER. Le développement se met sous la forme :

$$\text{sn}(u; k) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi v$$

$$\text{avec } v = \frac{u}{2K}$$

et

$$(51) \quad ib_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \text{sn}(u; k) \left\{ e^{in\pi v} - e^{-in\pi v} \right\} dv$$

Le calcul de l'intégrale :

$$J_N = \int_{-1}^{+1} \operatorname{sn}(u; k) e^{iN\pi v} dv,$$

où N peut prendre les valeurs $+n$ et $-n$, peut se faire en appliquant le théorème des résidus. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par le parallélogramme $(-1 ; +1 ; +\tau ; -2 + \tau)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{sn}(u; k) e^{iN\pi v} dv &= \left\{ \int_{-1}^{+1} + \int_1^{\tau} + \int_{\tau}^{-2+\tau} + \int_{-2+\tau}^{-1+\tau} \right\} \operatorname{sn}(u; k) e^{iN\pi v} dv \\ &= \left\{ \int_{-1}^{+1} + \int_1^{\tau} + \int_{\tau}^{-2+\tau} - \int_1^{\tau} \right\} \operatorname{sn}(u; k) e^{iN\pi v} dv \\ &= \left\{ \int_{-1}^{+1} - \int_{-2+\tau}^{\tau} \right\} \operatorname{sn}(u; k) e^{iN\pi v} dv. \end{aligned}$$

A l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$, la fonction $\operatorname{sn}(u; k) \cdot e^{iN\pi v}$ admet des pôles aux points $-1 + \tau/2$ et $\tau/2$ avec pour résidus, respectivement :

$$-\frac{1}{2K} \frac{1}{k} e^{iN\pi(-1+\tau/2)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2K} \frac{1}{k} e^{iN\pi\tau/2}$$

L'intégrale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{-1}^{+1} - \int_{-2+\tau}^{\tau} \right\} \operatorname{sn}(u; k) e^{iN\pi v} dv &= 2i\pi \frac{1}{k \cdot 2K} e^{iN\pi\tau/2} \left[1 - (-1)^N \right] \\ &= i\pi \frac{1}{kK} q^{N/2} \left[1 - (-1)^N \right] \end{aligned}$$

Faisons le changement de v en $v - 1 + \tau$ dans la deuxième intégrale ; on obtient :

$$\left[1 + (-1)^N q^N \right] \int_{-1}^{+1} \operatorname{sn}(u; k) e^{iN\pi v} dv = i\pi \frac{q^{N/2}}{kK} \left[1 - (-1)^N \right]$$

ou

$$\int_{-1}^{+1} \text{sn}(u; k) e^{i\pi N v} dv = i\pi \frac{1}{kK} q^{N/2} \frac{\{1 - (-1)^N\}}{\{1 + (-1)^N q^N\}}$$

pour N pair, l'intégrale est nulle.

pour N impair, nous pouvons considérer les deux cas suivants :

$$N = 2p+1, J_{2p+1} = i\pi \frac{1}{kK} q^{p+1/2} \frac{2}{1-q^{2p+1}}$$

$$N = -(2p+1), J_{-(2p+1)} = i\pi \frac{1}{kK} q^{-(p+1/2)} \frac{2}{1-q^{-(2p+1)}} = -J_{2p+1}$$

Le coefficient b_n de la série de FOURIER est donc :

$$ib_{2p+1} = \frac{2}{2} J_{2p+1}$$

$$b_{2p+1} = 2 \frac{\pi}{kK} \frac{q^{p+1/2}}{1-q^{2p+1}}$$

Le développement de $\text{sn}(u; k)$ s'écrit donc :

$$(52) \quad \text{sn}(u; k) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{o}^{\infty} \frac{q^{p+1/2}}{1-q^{2p+1}} \sin(2p+1) \pi v$$

Les développements des autres fonctions de JACOBI se calculent de façon identique. On a :

$$(53) \quad \text{cn}(u; k) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{o}^{\infty} \frac{q^{p+1/2}}{1+q^{2p+1}} \cos(2p+1) \pi v$$

$$(54) \quad \text{dn}(u; k) = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{1}^{\infty} \frac{q^p}{1+q^{2p}} \cos p \pi v$$

3,10 - DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES -

Nous nous proposons tout d'abord de faire l'étude de la décomposition en éléments simples d'une fonction elliptique quelconque. Ensuite, nous traiterons deux exemples qui se rapportent aux fonctions de JACOBI, et qui ont une utilisation directe dans la détermination des intégrales elliptiques.

Considérons une fonction elliptique $f(u)$, de périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Ses pôles, d'ordre p quelconque, dans un parallélogramme des périodes, sont notés $a_1, a_2 \dots a_n$, et les parties principales relatives à ces pôles sont :

$$A_1(u) = \frac{\alpha_1}{(u-a_1)} + \frac{\beta_1}{(u-a_1)^2} + \dots + \frac{\chi_1}{(u-a_1)^p}$$

$$A_2(u) = \frac{\alpha_2}{(u-a_2)} + \frac{\beta_2}{(u-a_2)^2} + \dots + \frac{\eta_2}{(u-a_2)^q}$$

Nous allons étudier la fonction $\Phi(u)$ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi(u) = f(u) - & \left\{ \alpha_1 \mathcal{Z}(u-a_1) - \beta_1 \mathcal{Z}'(u-a_1) + \dots \right. \\ & \left. + (-1)^{(p-1)} \frac{\chi_1}{(p-1)!} \mathcal{Z}^{(p-1)}(u-a_1) \right\} \\ - & \left\{ \alpha_2 \mathcal{Z}(u-a_2) - \beta_2 \mathcal{Z}'(u-a_2) + \dots \right. \\ & \left. + (-1)^{(q-1)} \frac{\eta_2}{(q-1)!} \mathcal{Z}^{(q-1)}(u-a_2) \right\} \end{aligned}$$

dans laquelle $\mathcal{Z}(u)$ est la fonction définie au § 2,1, c'est-à-dire :

$$\mathcal{Z}(u) = \frac{1}{u} + \text{fonction holomorphe}$$

Au voisinage de $u = a_1$, par exemple, on a :

$$\mathcal{Z}(u-a_1) = \frac{1}{u-a_1} + \text{fonction holomorphe}$$

$$\mathcal{Z}'(u-a_1) = -\frac{1}{(u-a_1)^2} + \text{fonction holomorphe}$$

Faisons la somme membre à membre de ces équations, après les avoir multipliées respectivement par $\alpha_1 ; \beta_1 \dots \chi_1$; il vient :

$$\alpha_1 \mathcal{Z}(u-a_1) - \beta_1 \mathcal{Z}'(u-a_1) + \dots + (-1)^{p-1} \frac{\chi_1}{(p-1)!} \mathcal{Z}^{(p-1)}(u-a_1)$$

$$= A_1(u) + \text{fonction holomorphe.}$$

Nous pouvons étendre ce raisonnement à tous les pôles a_n de la fonction $f(u)$. On en déduit que $\Phi(u)$ est une fonction holomorphe.

D'après les propriétés (4) du Chapitre 2, au sujet de la fonction $\mathcal{Z}(u)$, on a :

$$\Phi(u + 2\omega_1) = \Phi(u)$$

$$\Phi(u + 2\omega_2) = \Phi(u) - \frac{2\delta}{\omega_1} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

Or, d'après le théorème (1,2,3) la somme des résidus d'une fonction elliptique est nulle, on peut alors conclure que la fonction $\Phi(u)$ est holomorphe et doublement périodique ; elle se réduit à une constante C_0 .

On peut alors affirmer que toute fonction elliptique $f(u)$ peut se mettre sous la forme :

$$(55) \quad f(u) = C_0 + \sum_1^n \left\{ \alpha_1 \mathcal{Z}(u-a_1) - \beta_1 \mathcal{Z}'(u-a_1) + \dots + (-1)^{(p-1)} \frac{\chi_1}{(p-1)!} \mathcal{Z}^{(p-1)}(u-a_1) \right\}$$

la somme étant étendue à tous les pôles de $f(u)$.

1er exemple : Décomposition en éléments simples de la fonction $1/\text{sn}^2(u;k)$

La fonction $\frac{1}{\text{sn}^2(u;k)}$ de périodes $2K$ et $2iK'$, admet dans un parallélogramme des périodes, un pôle double pour $u = 0$. Au voisinage de u égal à zéro, on a :

$$\frac{1}{\text{sn}^2(u;k)} = \frac{1}{u^2} + \text{fonction holomorphe,}$$

ce qui peut s'écrire d'après la définition précédente :

$$\frac{1}{\text{sn}^2(u;k)} = -\mathcal{Z}'(u) + C_0$$

Faisons le changement u en $u + iK'$, il vient :

$$(56) \quad k^2 \text{sn}^2(u;k) = -\mathcal{Z}'(u + iK') + C_0$$

Remplaçons la fonction $\mathcal{Z}(u)$ par son expression (5) du paragraphe (2,1).

$$\mathcal{Z}(u) = \frac{H'(u)}{H(u)} = \frac{1}{2K} \frac{\theta'_1(v)}{\theta_1(v)}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \mathcal{Z}(u + iK') &= \frac{1}{4K^2} \frac{d}{dv} \left(\frac{\theta'_1(v+\tau/2)}{\theta_1(v+\tau/2)} \right) \\ &= \frac{1}{4K^2} \frac{d}{dv} \left(\frac{\theta'_4(v)}{\theta_4(v)} \right) \end{aligned}$$

L'expression (56) s'écrit alors :

$$k^2 \text{sn}^2(u;k) = -\frac{1}{4K^2} \frac{d}{dv} \left(\frac{\theta'_4(v)}{\theta_4(v)} \right) + C_0$$

La constante est calculée en faisant $u = 0$ et en remarquant que pour $v = 0$, $\theta'_4(0)$ est nulle, la fonction $\theta_4(v)$ étant paire ; d'où :

$$(57) \quad C_0 = \frac{1}{4K^2} \frac{\theta''_4(0)}{\theta_4(0)}$$

et la décomposition s'écrit :

$$(58) \quad k^2 \operatorname{sn}^2(u; k) = \frac{1}{4K^2} \left\{ - \frac{d}{dv} \left(\frac{\theta'_4(v)}{\theta_4(v)} \right) + \frac{\theta''_4(0)}{\theta_4(0)} \right\}$$

2ème exemple : Décomposition en éléments simples de la fonction

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2(u; k) - \operatorname{sn}^2(a; k)}$$

où a est une constante différente de :

$$2mK + 2niK'$$

m et n entiers

C'est une fonction doublement périodique de périodes $2K$ et $2iK'$; elle admet deux pôles simples aux points $\pm a$. Le résidu relatif au pôle $+a$ est :

$$\alpha_1 = \lim_{u \rightarrow a} \frac{u - a}{\operatorname{sn}^2(u; k) - \operatorname{sn}^2(a; k)}$$

La règle de l'Hopital nous donne :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2 \operatorname{sn}(a; k) \operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)}$$

Le résidu relatif au pôle $-a$ est $-\alpha_1$. La fonction se développe donc comme suit :

$$(59) \quad \frac{2 \operatorname{sn}(a; k) \operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)}{\operatorname{sn}^2(u; k) - \operatorname{sn}^2(a; k)} = \mathcal{Z}(u - a) - \mathcal{Z}(u + a) + C_0$$

Faisons $u = 0$ dans l'expression ci-dessus en remarquant que $\mathcal{Z}(u)$ est une fonction impaire.

$$(60) \quad C_0 = - \frac{2 \operatorname{sn}(a; k) \operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)}{\operatorname{sn}^2(a; k)} + 2 \mathcal{Z}(a)$$

La fonction $\text{sn}(u;k)$ est définie par :

$$\text{sn}(u;k) = \frac{\theta_3}{\theta_2} \cdot \frac{\theta_1(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

Prenons la dérivée logarithmique des deux membres :

$$\frac{\text{cn}(u;k) \text{dn}(u;k)}{\text{sn}(u;k)} = \frac{1}{2K} \left\{ \frac{\theta'_1(v/q)}{\theta_1(v/q)} - \frac{\theta'_4(v/q)}{\theta_4(v/q)} \right\}$$

Faisons $u = a$, ou $v = \beta = a/2K$, dans l'expression ci-dessus et reportons dans l'expression donnant C_0 .

$$C_0 = -2 \left\{ \mathcal{Z}(a) - \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(\beta/q)}{\theta_4(\beta/q)} \right\} + 2 \mathcal{Z}(a)$$

$$(61) \quad C_0 = \frac{1}{K} \frac{\theta'_4(\beta/q)}{\theta_4(\beta/q)}$$

Nous pouvons alors écrire la décomposition de la fonction $\frac{1}{\text{sn}^2(u;k) - \text{sn}^2(a;k)}$

$$(62) \quad \frac{2 \text{sn}(a;k) \text{cn}(a;k) \text{dn}(a;k)}{\text{sn}^2(u;k) - \text{sn}^2(a;k)} = \mathcal{Z}(u-a) - \mathcal{Z}(u+a) + \frac{1}{K} \frac{\theta'_4(\beta/q)}{\theta_4(\beta/q)}$$

CHAPITRE 4

-:-:-

INTEGRALES ELLIPTIQUES

4,1 - INTEGRALES ELLIPTIQUES SOUS LA FORME DE LEGENDRE -

1 - Définition

On appelle intégrale elliptique, toute intégrale de la forme :

$$(1) \quad \int R(x;y) dx$$

dans laquelle la fonction R est rationnelle en x et en y = P(x), P(x) désignant un polynôme entier en x du troisième ou du quatrième degré.

LEGENDRE a montré qu'une telle intégrale peut toujours être décomposée en trois intégrales du type suivant :

$$(2) \quad F(\phi; k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

$$(3) \quad E(\phi; k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2 t} dt$$

$$(4) \quad \Pi (\Phi; \nu; k) = \int_0^x \frac{dx}{(1+\nu x^2) \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = \int_0^\Phi \frac{dt}{(1+\nu \sin^2 t) \sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$$

avec $\Phi = \text{Arc sin } x$.

Le coefficient k est appelé module de l'intégrale. Le coefficient ν est appelé paramètre de l'intégrale elliptique de troisième espèce. L'expression

$\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}$ est souvent notée $\Delta (t; k)$.

Ces intégrales sont dites complètes lorsque l'argument Φ est égal à $\pi/2$, et on écrit alors :

$$(5) \quad F\left(\frac{\pi}{2}; k\right) = K(k) = K$$

$$(6) \quad E\left(\frac{\pi}{2}; k\right) = E(k) = E$$

$$(7) \quad \Pi\left(\frac{\pi}{2}; \nu; k\right) = \Pi(\nu; k)$$

Lorsque les intégrales elliptiques complètes de première et de deuxième espèce sont relatives au module complémentaire : $k' = \sqrt{1-k^2}$, on note souvent :

$$(8) \quad F\left(\frac{\pi}{2}; k'\right) = K(k') = K'$$

$$(9) \quad E\left(\frac{\pi}{2}; k'\right) = E(k') = E'$$

2- Développement en série entière des intégrales de LEGENDRE.

Une première méthode pour le calcul numérique des intégrales elliptiques consiste à intégrer terme à terme le développement en série entière de la fonction sous le signe somme.

D'après la formule du binôme, on a :

$$(10) \quad (1-k^2 \sin^2 t)^{-1/2} = 1 \pm \frac{1}{2} k^2 v_2 \pm \frac{3}{8} k^4 v_4 + \dots$$

$$\pm \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} k^{2n} v_{2n}$$

avec $v_{2n} = \sin^{2n} t$

Le résultat sous forme de sommation s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} (11) \quad F(\phi; k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!} k^{2n} S_{2n}(\phi) \\ (12) \quad E(\phi; k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/2)_n}{n!} k^{2n} S_{2n}(\phi) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} |k| &< 1 \\ |\sin \phi| &< 1 \end{aligned}$$

avec :

$$(13) \quad (1/2)_n = \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}+1\right) \left(\frac{1}{2}+2\right) \dots \left(\frac{1}{2}+n-1\right)$$

ou bien

$$(13 \text{ bis}) \quad (1/2)_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \text{ si } (2n-1)!! = 1.3.5 \dots (2n-1)$$

et

$$(14) \quad S_{2n}(\phi) = \int_0^\phi \sin^{2n}(t) dt = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ C_n^{2n} \phi + \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{2n}{(n-m)} \frac{\sin 2m\phi}{m} \right\}$$

L'intégrale de troisième espèce s'exprime par une série plus complexe.

$$(15) \quad \Pi(\phi; v; k) = \sum_{n=0}^{\infty} (-v)^n B_n^{(-1/2)} \left(\frac{k^2}{v}\right) S_{2n}(\phi)$$

$$|k| < 1 \quad |v| < 1 \quad |\sin \phi| < 1$$

et

$$B_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^\alpha z^m$$

4,2 - CALCUL DE $F(\phi; k)$ CONNAISSANT k et ϕ . METHODE DE LANDEN -

La méthode de LANDEN est une méthode itérative. Elle fournit un moyen très

simple et très précis pour la détermination d'une intégrale $F(\Phi; k)$ lorsque l'on connaît le module k et la borne supérieure Φ , à condition que k soit inférieur à 1.

La transformation de LANDEN, appliquée à la fonction $\text{sn}(u; k)$ donne le résultat suivant, répertorié dans le Tableau 7 du § 3,8.

$$(16) \quad \text{sn} \left[(1+k') u ; \frac{1-k'}{1+k'} \right] = (1+k') \frac{\text{sn}(u; k) \cdot \text{cn}(u; k)}{\text{dn}(u; k)}$$

Si nous appelons :

$$(17) \quad \begin{aligned} u_1 &= (1+k') u \\ k_1 &= \frac{1-k'}{1+k'} \end{aligned} ,$$

nous pouvons écrire :

$$(19) \quad \text{sn}(u_1 ; k_1) = (1+k') \frac{\text{sn}(u; k) \cdot \text{cn}(u; k)}{\text{dn}(u; k)}$$

et, compte tenu de la définition amplitudinis

$$(20) \quad \sin(\Phi_1) = (1+k') \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\Delta(\Phi; k)}$$

Cette expression est équivalente à :

$$(21) \quad \text{tg}(\Phi_1 - \Phi) = k' \text{tg} \Phi$$

Pour deux arcs Φ et Φ_1 , liés par la relation (21), on a d'après les formules (17) et (18).

$$(22) \quad F(\Phi_1 ; k_1) = (1+k') F(\Phi; k)$$

avec

$$(23) \quad k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$$

ou bien

$$(24) \quad F(\Phi; k) = \frac{1+k_1}{2} F(\Phi_1; k_1)$$

avec

$$(25) \quad k = \frac{2 \sqrt{k_1}}{1 + k_1}$$

a) Méthode de calcul utilisant une suite de module k_n décroissants

$$\text{Pour } k_1 < 1, \text{ on a } k = \frac{2 \sqrt{k_1}}{1 + k_1} > k_1$$

Par ailleurs, pour $\phi \leq \pi/2$ on a $0 < \phi < \phi_1$

Il est donc possible de ramener le calcul d'une intégrale $F(\phi; k)$ à une intégrale $F(\phi_1; k_1)$ de module $k_1 < k$.

Après itérations successives, l'intégrale $F(\phi; k)$ est donnée par la formule (26) :

$$(26) \quad F(\phi; k) = \frac{1+k_1}{2} \frac{1+k_2}{2} \dots \frac{1+k_n}{2} F(\phi_n; k_n)$$

Le module k_n décroît pour tendre vers zéro. L'amplitude croît jusqu'à ϕ_n et l'on a :

$$(27) \quad F(\phi_n; k_n) \neq \int_0^{\phi_n} d\phi = \phi_n$$

La formule (26) prend la forme suivante :

$$(28) \quad F(\phi; k) = \left\{ \prod_{p=1}^n \left(\frac{1+k_p}{2} \right) \right\} \phi_n$$

b) Méthode de calcul en utilisant une suite de module k_n croissants.

En permutant les arcs ϕ , ϕ_1 et les modules k , k_1 dans les formules de LANDEN, on obtient :

$$(29) \quad \text{tg}(\phi - \phi_1) = k'_1 \text{tg} \phi_1$$

$$(30) \quad k = \frac{1-k_1}{1+k_1} \quad \text{ou} \quad k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

$$(31) \quad F(\Phi; k) = \frac{2}{1+k} F(\Phi_1; k_1)$$

avec

$$k < k_1 \quad \text{et} \quad \Phi_1 < \Phi$$

Après itérations successives, le module k_n tend vers 1 et l'intégrale $F(\Phi; k)$ est égale à :

$$(32) \quad F(\Phi; k) = \frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1+k_1} \cdots \frac{2}{1+k_{n-1}} F(\Phi_n; k_n)$$

$$(33) \quad F(\Phi_n; k_n) \neq \int_0^{\Phi_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 \varphi}} = \text{Log}_n \left| \text{tg} \left(\pi/4 + \Phi_n/2 \right) \right|$$

Compte tenu de la relation

$$\frac{k_1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{1+k}$$

l'expression de l'intégrale elliptique $F(\Phi; k)$ est :

$$(34) \quad F(\Phi; k) = k_n \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2 \cdots k_{n-1}}{k}} \text{Log}_n \left| \text{tg} \left(\pi/4 + \frac{\Phi_n}{2} \right) \right|$$

Nous donnons ci-après un tableau récapitulatif.

Calcul de $F(\phi; k)$
suite des modules k_n décroissante

$$k_p = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{p-1}^2}}{1 + \sqrt{1 + k_{p-1}^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_p - \varphi_{p-1}) = \sqrt{1 - k_{p-1}^2} \operatorname{tg} \varphi_{p-1}$$

$$F(\phi; k) = \Phi_n \prod_{p=1}^n \frac{1 + k_p}{2}$$

Calcul de $F(\phi; k)$
suite des modules k_n croissante

$$k_p = \frac{2 \sqrt{k_{p-1}}}{1 + k_{p-1}}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_{p-1} - \varphi_p) = \sqrt{1 - k_p^2} \operatorname{tg} \varphi_p$$

$$F(\phi; k) = k_n \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2 \cdots k_{n-1}}{k}} \operatorname{Log} \left\{ \operatorname{tg} \left| \frac{\eta}{4} + \frac{\phi_n}{2} \right| \right\}$$

Remarque : Les formules (22) et (24) peuvent être établies directement en effectuant dans l'intégrale le changement de variable défini par la relation (21).

Les intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce peuvent être calculées d'une manière analogue en effectuant le changement de variable de LANDEN. Cette méthode donne lieu à des calculs laborieux ; nous lui préférons l'utilisation des fonctions elliptiques de JACOBI pour exprimer $E(\phi; k)$ et $\Pi(\phi; \nu; k)$.

4,3 - INTEGRALES ELLIPTIQUES COMPLETES -

Les intégrales elliptiques complètes sont obtenues en faisant ϕ égal à $\pi/2$ dans les formules précédentes :

$$(35) \quad S_{2n} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\phi) d\phi = \frac{(1/2)_n}{n!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$(36) \quad F \left(\frac{\pi}{2} ; k \right) = K = \frac{\pi}{2} F_1 \left(1/2 ; 1/2 ; 1 ; k^2 \right)$$

$$(37) \quad E \left(\frac{\pi}{2} ; k \right) = E = \frac{\pi}{2} F_1 \left(-1/2 ; 1/2 ; 1 ; k^2 \right)$$

$$(38) \quad \Pi \left(\frac{\pi}{2} ; \nu ; k \right) = \Pi(\nu; k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!} (-\nu)^n B_n^{(-1/2)} \left(\frac{k^2}{\nu} \right)$$

La fonction F_1 est une série hypergéométrique de GAUSS qui se développe comme suit :

$$(39) \quad F_1(a, b, c, z) = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a \cdot (a+1) \cdot b \cdot (b+1)}{c \cdot (c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

Avec la transformation de LANDEN, nous aurons les expressions :

$$(40) \quad K = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+k_p)}{2}$$

avec

$$k_p = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}^{p-1}}{1 + \sqrt{1 - k^2}^{p-1}}$$

TRICOMI a donné une expression de l'intégrale K en fonction du module k, avec le changement de variable :

$$k = \sin \theta \quad 0 < \theta < \pi/2$$

$$(41) \quad K(\sin \theta) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(1/2)_n}{n!} \right]^2 \sin \left[(4n+1) \theta \right]$$

Remarquons que pour k peu différent de zéro, l'intégrale K tend vers $\pi/2$.

Pour k très voisin de 1 ou k' très voisin de zéro, la convergence des séries précédentes est très lente ; on a alors intérêt à utiliser les relations suivantes :

$$(42) \quad K = \lambda + \frac{\lambda - 1}{4} k'^2 + \frac{9}{64} \left(\lambda - \frac{7}{6} \right) k'^4 + \frac{25}{256} \left(\lambda - \frac{37}{30} \right) k'^6 + \dots$$

$$(43) \quad E = 1 + \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) k'^2 + \frac{3}{16} \left(\lambda - \frac{13}{12} \right) k'^4 + \frac{15}{128} \left(\lambda - \frac{6}{5} \right) k'^6 + \dots$$

dans lesquelles :

$$(44) \quad \lambda = \text{Log}_n \frac{4}{k'}$$

L'intégrale de troisième espèce s'exprime de la même façon à condition que $\frac{k'}{v'}$ soit très voisin de zéro.

Nous poserons :

$$(45) \quad v' = \sqrt{1 + v^2}$$

$$\left(1 + \frac{k^2}{v^2}\right) \Pi(v^2; k) - \frac{k^2}{v^2} K = \sqrt{v'^2 - k'^2} \left\{ \frac{\arccos \frac{1}{v'}}{v' \sqrt{v'^2 - 1}} + R \right\}$$

$$\begin{aligned} R = & \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \frac{k'^2}{2 v'^3} + \frac{k'^4}{16} \left\{ -1 + \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{v'^3} \left(1 + \frac{6}{v'^2} \right) \right\} \\ & + \frac{k'^6}{16} \left\{ -\frac{7}{16} - \frac{1}{v'^2} + \left(\lambda + \frac{1}{6} \right) \frac{1}{v'^3} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{v'^2} + \frac{5}{v'^4} \right) \right\} \\ & + \frac{15 k'^8}{256} \left\{ -\frac{37}{144} - \frac{21}{40 v'^2} - \frac{1}{v'^4} + \left(\lambda + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{v'^3} \left(\frac{5}{24} + \frac{9}{20 v'^2} + \frac{1}{v'^4} + \frac{14}{3 v'^6} \right) \right\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

4,4 - INTEGRALES ELLIPTIQUES EXPRIMEES AVEC LA NOTATION DE JACOBI -

Dans les paragraphes précédents, nous avons fait l'étude des intégrales elliptiques en les considérant comme des fonctions de la borne supérieure ϕ . Les développements déjà cités, se déduisent par une simple analyse de la fonction sous le signe somme.

La définition de la fonction amplitudinis au § 3,6 nous permet d'exprimer la borne supérieure de l'intégrale elliptique en fonction de l'intégrale elliptique de première espèce u mise sous la forme de LEGENDRE :

$$u = \int_0^{\phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Le changement de variable :

$$\operatorname{sn}(u; k) = \sin \phi$$

dans la fonction à intégrer permet d'exprimer toute fonction sous le signe somme à partir des fonctions de JACOBI et d'en faire une étude semblable à celle des fonctions elliptiques.

Les fonctions sn ; cn ; dn seront avantageusement remplacées pour le calcul numérique, par les fonctions θ_j .

Au paragraphe 3,1 nous avons déjà exprimé le module k des fonctions thêta :

$$k = \frac{\theta_2^2(o/q)}{\theta_3^2(o/q)} \quad \text{ou bien} \quad k' = \frac{\theta_4^2(o/q)}{\theta_3^2(o/q)}$$

Réciproquement, nous allons rechercher à exprimer le paramètre q en fonction du module k des intégrales elliptiques ou des fonctions de JACOBI.

Considérons la quantité :

$$\begin{aligned} (50) \quad \varepsilon &= \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\theta_3(o/q) - \theta_4(o/q)}{\theta_3(o/q) + \theta_4(o/q)} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier les identités suivantes en appliquant deux fois la transformation de LANDEN sur chacune des fonctions $\theta_2(o/q^4)$ et $\theta_3(o/q^4)$.

$$2 \theta_2(o/q^4) = \theta_3(o/q) - \theta_4(o/q)$$

$$2 \theta_3(o/q^4) = \theta_3(o/q) + \theta_4(o/q)$$

de sorte que l'on a :

$$\varepsilon = \frac{q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \dots}$$

On en déduit q sous forme implicite, soit :

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon q^4 - q^9 + 2\varepsilon q^{16} - q^{25} \quad .$$

En remplaçant de proche en proche q par sa valeur, il vient :

$$(51) \quad q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^{13} + 150\varepsilon^{17} + 1707\varepsilon^{21} + \dots$$

Cette série est convergente pour $|\varepsilon| < 1/2$

4,5 - INTEGRALE ELLIPTIQUE DE DEUXIEME ESPECE AVEC LA NOTATION DE JACOBI -

1 - Définition

Après avoir fait le changement de variable $t = \text{am}(u;k)$, dans la formule (3), l'intégrale elliptique de deuxième espèce prend la forme suivante :

$$(52) \quad E(u;k) = \int_0^u \text{dn}^2(t;k) dt$$

avec

$$u = F(\phi;k)$$

2 - Périodicité

Du fait de la périodicité de la fonction $\text{dn}(t;k)$ de période $2K$, nous pouvons écrire d'une part :

$$E(u+2K;k) - E(u;k) = \int_u^{u+2K} \text{dn}^2(t;k) dt$$

$$= \int_0^{2K} \text{dn}^2(t;k) dt$$

$$= E(2K;k)$$

ou

$$(53) \quad E(u+2K;k) = E(u;k) + E(2K;k)$$

d'autre part, en utilisant la relation :

$$\operatorname{dn}(t+2iK') = -\operatorname{dn}(t;k)$$

nous avons :

$$E(u+2iK';k) - E(u;k) = \int_u^{u+2iK'} \operatorname{dn}^2(t;k) dt$$

$$= \int_0^{2iK'} \operatorname{dn}^2(t;k) dt$$

$$\text{ou} \qquad \qquad \qquad = E(2iK';k)$$

$$(54) \qquad E(u+2iK';k) = E(u;k) + E(2iK';k)$$

En outre, on peut tirer de la relation (53) :

$$(55) \qquad E(2K) = 2E(K)$$

$$(56) \qquad E(u+2mK) = E(u) + 2mE(K)$$

Remarque : la fonction $E(u;k)$ n'est pas doublement périodique : elle n'est donc pas elliptique.

3 - Théorème d'addition

Considérons la fonction $G(u)$ définie par la relation :

$$G(u) = E(u) + E(a) - E(u+a)$$

C'est une fonction doublement périodique, de périodes $2K$ et $2iK'$; elle admet des pôles aux points $u = iK'$ et $u = iK' - a$ et des zéros aux points 0 et $-a$.

Par ailleurs, la fonction $\operatorname{sn}(u;k) \cdot \operatorname{sn}(u+a;k)$ vérifie les mêmes propriétés que la fonction $G(u)$. Elles sont donc elliptiques, copériodiques, et ne diffèrent que par une constante :

$$(57) \qquad \operatorname{sn}(u;k) \cdot \operatorname{sn}(u+a;k) = CF(u)$$

Le calcul de C est obtenu en dérivant et en faisant tendre u vers zéro, soit :

$$C = \frac{\text{cn}(0) \text{dn}(0) \text{sn}(a)}{E'(0) - E'(a)}$$

Remplaçons E' par dn^2 ; il vient :

$$C = \frac{\text{sn}(a;k)}{1 - \text{dn}^2(a;k)} = \frac{1}{k^2 \text{sn}(a;k)}$$

La formule (57) s'écrit alors :

$$(58) \quad E(u) + E(a) - E(u+a) = k^2 \text{sn}(u) \text{sn}(a) \text{sn}(u+a)$$

En faisant $a = -a$ dans cette relation, et en additionnant les deux quantités $E(u+a)$ et $E(u-a)$, on a :

$$(59) \quad E(u+a) + E(u-a) = 2E(u) - \frac{2k^2 \text{sn}^2 a \text{sn} u \text{cn} u \text{dn} u}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 a}$$

Faisons $u = a$ dans l'équation (59), il vient :

$$(60) \quad E(2u) = 2E(u) - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn} 2u$$

4 - Transformation de JACOBI

Nous nous proposons de calculer l'intégrale elliptique E pour un argument imaginaire :

$$(61) \quad E(iu;k) = \int_0^{iu} \text{dn}^2(t;k) dt$$

Faisons le changement de variable $t = it'$

$$E(iu;k) = i \int_0^u \text{dn}^2(it';k) dt'$$

Appliquons la transformation de JACOBI du § 3,8 à la fonction $\text{dn}^2(it';k)$, on peut écrire :

$$E(iu; k) = i \int_0^u \frac{dn^2(t'; k')}{cn^2(t'; k')} dt'$$

Ecrivons la somme :

$$(62) \quad E(iu; k) + iE(u; k') = i \int_0^u \left\{ \frac{dn^2(t'; k')}{cn^2(t'; k')} + dn^2(t'; k') \right\} dt'$$

On peut vérifier l'égalité :

$$1 + \frac{d}{dt'} \left\{ \operatorname{sn}(t'; k') \frac{dn(t'; k')}{cn(t'; k')} \right\} = dn^2(t'; k') + \frac{dn^2(t'; k')}{cn^2(t'; k')}$$

et l'intégration du deuxième membre de la relation (62) s'écrit alors :

$$(63) \quad E(iu; k) + iE(u; k') = iu + i \operatorname{sn}(u; k') \frac{dn(u; k')}{cn(u; k')}$$

En particulier pour $u = 2K'$, il vient :

$$(64) \quad E(2iK'; k) = 2i(K' - E')$$

5 - Relation de LEGENDRE

Appliquons le théorème des résidus à la fonction $E(u; k)$ le long du contour formé par le parallélogramme de sommets : K ; $K+2iK'$; $-K+2iK'$; $-K$. Dans ce parallélogramme, la fonction $E(u)$ admet un pôle pour $u = iK'$ et le résidu en ce point est égal à $+1$. On a donc :

$$\left\{ \int_K^{K+2iK'} + \int_{K+2iK'}^{-K+2iK'} + \int_{-K+2iK'}^{-K} + \int_{-K}^K \right\} E(u; k) du = 2i\pi$$

$$\int_{-K}^{+K} \left[E(u; k) - E(u+2iK') \right] du + \int_0^{2iK'} \left[E(u+K) - E(u-K) \right] du = 2i\pi$$

D'après les propriétés (54), (59), (64) sur $E(u;k)$, on peut écrire :

$$-E(2iK') \cdot 2K + 2iK' \cdot E(2K) = 2i\pi$$

$$-4iK(K'-E') + 4iK'E = 2i\pi$$

Soit :

$$(65) \quad KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

6 - Expression de l'intégrale elliptique de deuxième espèce au moyen des fonctions θ_j .

L'intégrale elliptique de deuxième espèce, définie par la relation :

$$(66) \quad E(u;k) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(u;k) du,$$

peut s'écrire :

$$(67) \quad E(u;k) = u - k^2 \int_0^u \operatorname{sn}^2(u;k) du$$

L'intégration de la fonction $k^2 \cdot \operatorname{sn}^2(u;k)$ peut être faite après avoir décomposé cette fonction en éléments simples en utilisant les résultats du paragraphe 3,10.

$$k^2 \operatorname{sn}^2(u;k) = \frac{1}{4K^2} \left\{ -\frac{d}{dv} \frac{\theta'_4(v)}{\theta_4(v)} + \frac{\theta''_4(o)}{\theta_4(o)} \right\}$$

D'où :

$$(68) \quad E(u;k) = u + \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(v)}{\theta_4(v)} - \frac{1}{4K^2} \frac{\theta''_4(o)}{\theta_4(o)} u$$

$$E(u;k) = \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(v)}{\theta_4(v)} + u \left\{ 1 - \frac{1}{4K^2} \frac{\theta''_4(o)}{\theta_4(o)} \right\}$$

En particulier pour $u = K$, v est égal à $1/2$, et la fonction $\theta'_4(1/2)$ se transforme en la fonction $\theta'_3(o)$ laquelle est identiquement nulle.

On obtient ainsi :

$$(69) \quad E(K; k) = K - \frac{1}{4K} \frac{\theta''_4(0)}{\theta_4(0)}$$

et par suite :

$$E(u; k) = \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(v/q)}{\theta_4(v/q)} + u \frac{E}{K}$$

ou bien

$$(70) \quad E(u; k) = Z(u; k) + u \frac{E}{K}$$

en posant

$$Z(u; k) = \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

4,6 - FONCTION Z(u; k)

Nous avons posé pour définition de la fonction Z(u; k) :

$$(71) \quad Z(u; k) = \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

Elle satisfait donc à l'identité :

$$(72) \quad Z(u; k) = E(u; k) - u \frac{E}{K}$$

Les propriétés de la fonction Z(u) se déduisent de celles de E(u) :

- La fonction Z(u) est périodique, de période 2K, en effet :

$$\begin{aligned} Z(u+2K) &= E(u+2K) - (u+2K) \frac{E}{K} \\ &= E(u) + 2E - u \frac{E}{K} - 2E \\ (73) \quad &= Z(u) \end{aligned}$$

On montrerait de même à l'aide des relations (54), (64) et (65) que :

$$(74) \quad Z(u+2iK') = Z(u) - i \frac{\pi}{K}$$

- La fonction $Z(u)$ est une fonction impaire

- Elle admet des pôles aux zéros de la fonction $\theta_1(v/q)$, c'est-à-dire aux points $u = 2mK + (2n+1)iK'$.

Les valeurs remarquables de la fonction $Z(u;k)$ sont :

$$Z(0) = 0 \quad ; \quad Z(K) = 0 \quad \text{et} \quad Z'(0) = 1 - \frac{E}{K}$$

Le calcul de $Z(u+a)$ se fait à partir de l'expression de $E(u+a)$:

$$\begin{aligned} Z(u+a) &= E(u+a) - (u+a) \frac{E}{K} \\ &= E(u) + E(a) - k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(a) \operatorname{sn}(u+a) - (u+a) \frac{E}{K} \\ (75) \quad &= Z(u) + Z(a) - k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(a) \operatorname{sn}(u+a) \end{aligned}$$

On a aussi :

$$Z(u+a) - Z(u-a) = 2Z(a) - \frac{2k^2 \operatorname{sn}^2(a) \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(a)}$$

- Transformation imaginaire de JACOBI :

$$Z(iu;k) = E(iu;k) - iu \frac{E}{K}$$

Explicitons $E(iu;k)$ par la formule (63)

$$Z(iu;k) = -iE(u;k') + iu \left(1 - \frac{E}{K}\right) + i \frac{\operatorname{sn}(u;k') \operatorname{dn}(u;k')}{\operatorname{cn}(u;k')}$$

D'après la relation de LEGENDRE

$$1 - \frac{E}{K} \text{ est égal à } \frac{E'}{K'} - \frac{\pi}{2KK'}$$

La relation précédente se met alors sous la forme :

$$iZ(iu;k) = E(u;k') - u \frac{E'}{K'} + \frac{\pi u}{2KK'} - \frac{\operatorname{sn}(u;k') \operatorname{dn}(u;k')}{\operatorname{cn}(u;k')}$$

soit,

$$(76) \quad iZ(iu;k) = Z(u;k') + \frac{\pi u}{2KK'} - \frac{\operatorname{sn}(u;k') \operatorname{dn}(u;k')}{\operatorname{cn}(u;k')}$$

4,7. - TRANSFORMATION DES INTEGRALES ELLIPTIQUES -

Les opérations de changement de module dans les intégrales de première et de deuxième espèce sont données par le Tableau 8.

La transformation qui fait passer de module k au module $\frac{1-k'}{1+k}$, est appelée transformation de LANDEN.

k	$\sin \phi$	$\cos \phi$	$F(\phi; k)$	$E(\phi; k)$
$\frac{1}{k}$	$k \sin \phi$	$\Delta(\phi; k)$	$k F(\phi; k)$	$\frac{1}{k} \{ E(\phi; k) - k'^2 F(\phi; k) \}$
k'	$-i \operatorname{tg} \phi$	$\frac{1}{\cos \phi}$	$-i F(\phi; k)$	$i \{ E(\phi; k) - F(\phi; k) - \operatorname{tg} \phi \Delta(\phi; k) \}$
$\frac{1}{k'}$	$-i k' \operatorname{tg} \phi$	$\frac{\Delta(\phi; k)}{\cos \phi}$	$-i k' F(\phi; k)$	$\frac{i}{k'} \{ E(\phi; k) - k'^2 F(\phi; k) - \operatorname{tg} \phi \Delta(\phi; k) \}$
$i \frac{k}{k'}$	$\frac{k' \sin \phi}{\Delta(\phi; k)}$	$\frac{\cos \phi}{\Delta(\phi; k)}$	$k' F(\phi; k)$	$\frac{1}{k'} \{ E(\phi; k) - k^2 \frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi; k)} \}$
$\frac{k'}{ik}$	$-ik \frac{\sin \phi}{\Delta(\phi; k)}$	$\frac{1}{\Delta(\phi; k)}$	$-ik F(\phi; k)$	$\frac{i}{k} \{ E(\phi; k) - F(\phi; k) - k^2 \frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi; k)} \}$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{(1+k') \sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi; k)}$	$\frac{\cos^2 \phi - k' \cos^2 \phi}{\Delta(\phi; k)}$	$(1+k') F(\phi; k)$	$\frac{2}{1+k'} \{ E(\phi; k) + k' F(\phi; k) \} - (1-k') \frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi; k)}$

Tableau 8

4,8 - INTEGRALES ELLIPTIQUES DE TROISIEME ESPECE -

Appliquons le changement de variable $t = \text{am}(u;k)$ dans la formule (4); nous obtenons l'expression de l'intégrale elliptique de troisième espèce avec la notation de JACOBI :

$$(77) \quad \Pi(u;v;k) = \int_0^u \frac{dt}{1+v \operatorname{sn}^2(t;k)},$$

que l'on peut encore écrire :

$$(78) \quad \Pi(u;v;k) = u - v \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2(t;k)}{1+v \operatorname{sn}^2(t;k)} dt$$

L'intégrale $J = \int_0^u -v \frac{\operatorname{sn}^2(t;k)}{1+v \operatorname{sn}^2(t;k)} dt$ peut se calculer en utilisant la décomposition en éléments simples de la fonction $\frac{1}{\operatorname{sn}^2(t;k) - \operatorname{sn}^2(a;k)}$ que nous avons donnée au § 3,10.

Si $\alpha = \frac{t}{2K}$ et $\beta = \frac{a}{2K}$, on peut écrire en effet :

$$(79) \quad \frac{\operatorname{sn}(a;k) \cdot \operatorname{cn}(a;k) du(a;k)}{\operatorname{sn}^2(t;k) - \operatorname{sn}^2(a;k)} = \frac{1}{4K} \frac{\theta'_1(\alpha - \beta/q)}{\theta_1(\alpha - \beta/q)} - \frac{1}{4K} \frac{\theta'_1(\alpha + \beta/q)}{\theta_1(\alpha + \beta/q)} + \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(\beta/q)}{\theta_4(\beta/q)}$$

Faisons le changement de t en $t + iK'$, dans l'expression ci-dessus, il vient :

$$(80) \quad \frac{k^2 \operatorname{sn}(a;k) \operatorname{cn}(a;k) du(a;k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(a;k) \operatorname{sn}^2(t;k)} \operatorname{sn}^2(t;k) = \frac{1}{4K} \frac{\theta'_4(\alpha - \beta/q)}{\theta_4(\alpha - \beta/q)} - \frac{1}{4K} \frac{\theta'_4(\alpha + \beta/q)}{\theta_4(\alpha + \beta/q)} + \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(\beta/q)}{\theta_4(\beta/q)}$$

Posons :

$$(81) \quad v = -k^2 \operatorname{sn}^2(a;k)$$

où a peut être réel ou complexe. La décomposition en éléments simples de la fonction

à intégrer peut donc se mettre sous la forme :

$$\frac{\nu \operatorname{sn}^2(t; k)}{1 + \nu \operatorname{sn}^2(t; k)} = \frac{\operatorname{sn}(a; k)}{\operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)} \left\{ \frac{1}{4k} \frac{\theta'_4(\alpha - \beta/q)}{\theta_4(\alpha - \beta/q)} - \frac{1}{4k} \frac{\theta'_4(\alpha + \beta/q)}{\theta_4(\alpha + \beta/q)} - \frac{1}{2k} \frac{\theta'_4(\alpha/q)}{\theta_4(\alpha/q)} \right\}$$

L'intégrale J est alors égale à :

$$(82) \quad J = \frac{\operatorname{sn}(a; k)}{\operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\pi - \beta)}{\theta_4(\pi + \beta)} + \frac{u}{2k} \frac{\theta'_4(\beta/q)}{\theta_4(\beta/q)} \right\}$$

L'intégrale de troisième espèce $\Pi(u; v; k)$ aura alors pour expression :

$$(83) \quad \Pi(u; -k^2 \operatorname{sn}^2(a; k); k) = u + \frac{\operatorname{sn}(a; k)}{\operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\pi - \beta/q)}{\theta_4(\pi + \beta/q)} + u Z(a) \right\}$$

L'intégrale complète est obtenue pour $u = K$ soit :

$$(84) \quad \Pi(-k^2 \operatorname{sn}^2(a; k); k) = K + \frac{\operatorname{sn}(a; k)}{\operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)} K Z(a)$$

Le calcul de l'intégrale elliptique de troisième espèce, mise sous la forme de LEGENDRE fait apparaître une intégrale de la forme suivante :

$$(85) \quad \begin{aligned} \Pi^*(u; a; k) &= \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn}(a; k) \cdot \operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(a; k) \operatorname{sn}^2(t; k)} \operatorname{sn}^2(t; k) dt. \\ &= \frac{1}{2} \log_m \frac{\theta_4(\pi - \beta)}{\theta_4(\pi + \beta)} + u Z(a) \end{aligned}$$

La relation liant Π^* et Π est :

$$(85') \quad \Pi^*(u; a; k) = \frac{\operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)}{\operatorname{sn}(a; k)} \left\{ \Pi(u; -k^2 \operatorname{sn}^2(a; k); k) - u \right\}$$

1 - Propriétés de la fonction $\Pi(u; a; k)$

La fonction $\Pi^*(u; a; k)$ est une fonction impaire de u . De même, le changement de a en $-a$ entraîne le changement de $\text{sn}(a; k)$ en $-\text{sn}(a; k)$ et de $\Pi^*(u; -a; k)$ en $-\Pi^*(u; a; k)$.

La permutation de u et de a dans la fonction Π^* permet d'écrire :

$$(86) \quad \Pi^*(u; a) - \Pi^*(a; u) = u Z(a) - a Z(u)$$

ou

$$(87) \quad \Pi^*(u; a) - \Pi^*(a; u) = u E(a) - a E(u) ,$$

On obtient ainsi une relation simple entre les intégrales elliptiques de première, de deuxième et celles de troisième espèce.

2 - Périodicité

Le changement de u en $u + 2K$ dans la formule (85) permet d'écrire :

$$(88) \quad \begin{aligned} \Pi^*(u+2K; a) &= \frac{1}{2} \log_n \frac{\theta_4(\alpha - \beta + 1/q)}{\theta_4(\alpha + \beta + 1/q)} + (u+2K) Z(a) \\ \Pi^*(u+2K; a) &= \Pi^*(u; a) + 2K Z(a) \end{aligned}$$

Le changement de u en $u + 2iK'$ entraîne :

$$(89) \quad \begin{aligned} \Pi^*(u+2iK'; a) &= \frac{1}{2} \log_n \frac{\theta_4(\alpha - \beta + \tau/2/q)}{\theta_4(\alpha + \beta + \tau/2/q)} + (u+2iK') Z(a) \\ \Pi^*(u+2iK'; a) &= \Pi^*(u; a) + 2iK' Z(a) + \pi i \frac{a}{K} \end{aligned}$$

3 - Formules d'addition

Le calcul de l'expression :

$$\Pi^*(x; a) + \Pi^*(y; a) - \Pi^*(x+y; a)$$

se fait en exprimant chaque intégrale Π^* au moyen de la formule (85). En posant

$$\xi = \frac{x}{2K} ; \quad \eta = \frac{y}{2K} \quad \text{il vient ainsi :}$$

$$(90) \quad \Pi^*(x;a) + \Pi^*(y;a) - \Pi^*(x+y;a) = \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\xi-\beta) \theta_4(\eta-\beta) \theta_4(\xi+\eta+\beta)}{\theta_4(\xi+\beta) \theta_4(\eta+\beta) \theta_4(\xi+\eta-\beta)}$$

Si on considère :

$$\Pi^*(u;a) + \Pi^*(u;b) - \Pi^*(u;a+b)$$

on obtient, après avoir explicité $Z(a+b)$ par la relation (75) :

$$(91) \quad \Pi^*(u;a) + \Pi^*(u;b) - \Pi^*(u;a+b) = \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(u-\beta) \theta_4(u-\delta) \theta_4(u+\delta+\beta)}{\theta_4(u+\beta) \theta_4(u+\delta) \theta_4(u-\delta-\beta)} \\ + u k^2 \operatorname{sn}(a;k) \operatorname{sn}(b;k) \operatorname{sn}(a+b;k)$$

4 - Transformation imaginaire de JACOBI

On se propose de calculer l'intégrale :

$$\Pi^*(iu ; ia+K ; k)$$

son expression analytique s'exprime donc par :

$$(92) \quad \Pi^*(iu ; ia+k ; k) = iu Z(ia+k;k) + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(iu-i\beta-1/2/q)}{\theta_4(iu+i\beta+1/2/q)}$$

Explicitons chacun des termes du deuxième membre.

Par application de la relation (75) on a :

$$iZ(ia+K;k) = iZ(ia;k) - ik^2 \operatorname{sn}(ia;k) \operatorname{sn}(ia+K;k)$$

La transformation de JACOBI appliquée aux fonctions $Z(ia;k)$ et $\operatorname{sn}(ia;k)$ nous permet d'écrire :

$$iZ(ia+K;k) = Z(a;k') + \frac{\pi a}{2KK'} - k'^2 \frac{\operatorname{sn}(a;k') \operatorname{cn}(a;k')}{\operatorname{dn}(a;k')}$$

soit :

$$iZ(ia+K;k) = Z(a+K';k') + \frac{\pi a}{2KK'}$$

Par ailleurs, le deuxième terme du deuxième membre de l'équation (92), par application de la transformation de JACOBI sur les fonctions thêta, se développe comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(i\alpha - i\beta - 1/2/q)}{\theta_4(i\alpha + i\beta + 1/2/q)} &= -\frac{1}{2} \log \frac{e^{\frac{i\pi(\alpha-\beta)^2}{2}}}{e^{\frac{i\pi(\alpha+\beta)^2}{2}}} \frac{\theta_3(\alpha-\beta/q')}{\theta_3(\alpha+\beta/q')} \\ &= -\frac{\pi \alpha a}{2kk'} + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\alpha-\beta-1/2/q')}{\theta_4(\alpha+\beta+1/2/q')} \end{aligned}$$

La transformation de JACOBI sur l'intégrale Π^* ($iu; ia+k; k$) s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} \Pi^*(iu; ia+k; k) &= u Z(a+k'; k') + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\alpha-\beta-1/2/q')}{\theta_4(\alpha+\beta+1/2/q')} \\ (93) \quad \Pi^*(iu; ia+k; k) &= \Pi^*(u; a+k'; k') \end{aligned}$$

Changeons a en ia , la relation (93) s'écrit encore :

$$(94) \quad \Pi^*(iu; a+k; k) = -\Pi^*(u; ia+k'; k')$$

5 - Calcul de l'intégrale $\Pi(u; v; k)$

Le calcul de l'intégrale $\Pi(u; v; k)$ se fait en utilisant la relation (83).

Elle peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} (95) \quad \frac{cn(a; k) dn(a; k)}{sn(a; k)} \Pi(u; -k^2 sn^2(a; k); k) &= \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\alpha-\beta/q)}{\theta_4(\alpha+\beta/q)} \\ &+ u \left[Z(a; k) + \frac{cn(a; k) \cdot dn(a; k)}{sn(a; k)} \right] \end{aligned}$$

En remarquant que le rapport $\frac{\text{cn}(a;k) \text{dn}(a;k)}{\text{sn}(a;k)}$ est la dérivée logarithmique de la fonction $\text{sn}(a;k)$, il vient :

$$(96) \quad \frac{\text{cn}(a;k) \text{dn}(a;k)}{\text{sn}(a;k)} \prod \left(u; -k^2 \text{sn}^2(a;k); k \right) = \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\pi - \beta/q)}{\theta_4(\pi + \beta/q)} + \frac{\theta'_1(\beta/q)}{\theta_1(\beta/q)} \cdot \pi$$

Or le paramètre v de l'intégrale peut prendre n'importe quelle valeur de l'intervalle $] -\infty ; +\infty [$. Pour avoir l'expression du paramètre v par un coefficient réel, il convient de diviser l'intervalle de variation de v en quatre intervalles. Si l'on prend ϕ comme paramètre auxiliaire, avec $\alpha = \frac{\phi}{2K}$, l'intégrale $\Pi(u; v; k)$ se calcule comme suit, dans chacune des intervalles suivants :

$$a - v \text{ appartient à l'intervalle }] -\infty ; -1]$$

Nous poserons $a = \phi + iK'$

et alors

$$(97) \quad v = - \frac{1}{\text{sn}^2(\phi; k)} \quad 0 \leq \phi \leq K$$

L'expression (96) s'écrit alors :

$$(98) \quad \frac{\text{cn}(\phi; k) \text{dn}(\phi; k)}{\text{sn}(\phi; k)} \prod \left(u; -\frac{1}{\text{sn}^2(\phi; k)}; k \right) = \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\pi - \alpha/q)}{\theta_4(\pi + \alpha/q)} + \frac{\theta'_4(\alpha/q)}{\theta_4(\alpha/q)} \pi \quad \text{si } |\pi| > \beta$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\alpha + \pi/q)}{\theta_4(\alpha - \pi/q)} - \frac{\theta'_4(\alpha/q)}{\theta_4(\alpha/q)} \pi \quad \text{si } |\pi| < \beta$$

$$b - v \text{ appartient à l'intervalle } [-1 ; -k^2]$$

Nous poserons $a = i\phi + K + iK'$

soit

$$(99) \quad v = - \text{dn}^2(\phi; k') \quad 0 < \phi < K'$$

et

$$(100) \quad k'^2 \frac{\text{cn}(\phi; k') \text{sn}(\phi; k')}{\text{dn}(\phi; k')} \prod \left(u; -\text{dn}^2(\phi; k'); k \right) = \frac{1}{2i} \log \frac{\theta_2(\pi - id/q)}{\theta_2(\pi + id/q)} - i \frac{\theta'_3(id/q)}{\theta_3(id/q)}$$

$c - v$ appartient à l'intervalle $[-k^2 ; 0]$

Nous poserons $a = \phi$
 (101) $v = -k^2 \operatorname{sn}^2(\phi; k)$ $0 < \phi < K$

$$(102) \quad \frac{\operatorname{cn}(\varphi; k) \operatorname{dn}(\varphi; k)}{\operatorname{sn}(\varphi; k)} \prod \left(u; -k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi; k); k \right) = \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(v - \alpha/q)}{\theta_4(v + \alpha/q)} + \frac{\theta'_1(\alpha/q)}{\theta_1(\alpha/q)} v$$

$d - v$ appartient à l'intervalle $[0 ; +\infty[$

Nous poserons $a = i\phi$
 (103) $v = k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(\phi; k')}{\operatorname{cn}^2(\phi; k')}$ $0 < \phi < K'$

$$(104) \quad \frac{\operatorname{dn}(\varphi; k')}{\operatorname{sn}(\varphi; k') \operatorname{cn}(\varphi; k')} \prod \left(u; k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(\varphi; k')}{\operatorname{cn}^2(\varphi; k')}; k \right) = \frac{1}{2i} \log \frac{\theta_4(v + id/q)}{\theta_4(v - id/q)} + i \frac{\theta'_1(id)}{\theta_1(id)} v$$

6 - Tabulation des intégrales elliptiques complètes de troisième espèce

A notre connaissance, les intégrales elliptiques complètes n'ont jamais été tabulées. Cela provient certainement du fait qu'une tabulation complète est obtenue pour une variation de v dans l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$.

Nous allons montrer ici, qu'une intégrale elliptique complète de troisième espèce, de module et de paramètre quelconque est liée de façon simple à une intégrale elliptique complète de troisième espèce dont le paramètre est compris entre $-k$ et $+k$. Cette relation que nous justifierons ci-après est :

$$(105) \quad \Pi(v_1; k) + \Pi(v_2; k) - K = \frac{\Pi}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1+v_1)(1+v_2)}} \right\}$$

avec

$$(106) \quad v_1 \cdot v_2 = k^2$$

Remarque : Cette relation est valable dans tous les cas, en notant que lorsque la fonction à intégrer devient infini, les intégrales correspondantes doivent être prises au sens de CAUCHY.

Dès lors, on peut se borner à dresser une table des intégrales elliptiques de troisième espèce que l'on rencontre souvent dans les applications, pour des valeurs de v comprises entre $-k$ et $+k$. Cette table est donnée en annexe.

La relation⁽¹⁾ (105) est apparue accidentellement en identifiant les solutions d'un problème concret d'infiltration, obtenues de deux manières différentes.

Nous nous proposons d'en donner maintenant une démonstration purement mathématique.

Plusieurs cas sont à considérer suivant l'intervalle de variation de v_1 . Considérons par exemple le cas :

$$-1 \leq v_1 \leq -k^2$$

Le calcul de l'intégrale complète $\Pi(v_1; k)$ est donné au paragraphe précédent, où nous avons posé :

$$v_1 = -\operatorname{dn}^2(\phi_1; k')$$

$$k'^2 \frac{\operatorname{cn}(\phi_1; k') \operatorname{sn}(\phi_1; k')}{\operatorname{dn}(\phi_1; k')} \Big| \Big| (v_1; k) = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \frac{\theta'_3(id_1/q)}{\theta_3(id_1/q)}$$

L'intégrale elliptique complète $\Pi(v_2; k)$ telle que

$$v_1 \cdot v_2 = k^2$$

ou bien

$$(107) \quad v_2 = -\frac{k^2}{\operatorname{dn}^2(\phi_1; k')} \quad \text{et} \quad -1 < v_2 < -k^2$$

se calcule de la même façon puisque v_2 appartient au même intervalle que v_1 , c'est-à-dire :

$$k'^2 \frac{\operatorname{cn}(\phi_2; k') \operatorname{sn}(\phi_2; k')}{\operatorname{dn}(\phi_2; k')} \Big| \Big| (v_2; k) = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \frac{\theta'_3(id_2/q)}{\theta_3(id_2/q)}$$

$$(108) \quad v_2 = -\operatorname{dn}^2(\phi_2; k')$$

(1) C.R. Acad. Sc. Paris, 25 janvier 1967, 264, n°4 série A.
Ecoulement autour d'un parafoille épais enfoncé partiellement dans un terrain perméable, homogène, isotrope, limité par un substratum horizontal. Note de MM. Claude THIRRIOT et Pierre GUEVEL.

Les relations (107) et (108) sont compatibles si et seulement si :

$$(109) \quad \phi_2 = K' - \phi_1$$

Le changement de ϕ_2 en $K' - \phi_1$ dans l'expression de $\Pi(v_2; k)$ donne le résultat suivant :

$$k'^2 \frac{\operatorname{sn}(\varphi_1; k') \operatorname{cn}(\varphi_1; k')}{\operatorname{dn}(\varphi_1; k')} \prod(\nu_2; k) = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \frac{\theta'_3(z_2 - i\alpha_1/q)}{\theta_3(z_2 - i\alpha_1/q)}$$

La somme des deux intégrales $\Pi(v_1; k)$ et $\Pi(v_2; k)$ s'écrit :

$$(110) \quad k'^2 \frac{\operatorname{sn}(\varphi_1; k') \operatorname{cn}(\varphi_1; k')}{\operatorname{dn}(\varphi_1; k')} \left\{ \prod(\nu_1; k) + \prod(\nu_2; k) \right\} = \pi - \frac{i}{2} \left\{ \frac{\theta'_3(i\alpha_1)}{\theta_3(i\alpha_1)} - \frac{\theta'_3(z_2 - i\alpha_1)}{\theta_3(z_2 - i\alpha_1)} \right\}$$

La quantité entre parenthèse du deuxième membre peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\theta'_3(i\alpha_1)}{\theta_3(i\alpha_1)} + \frac{\theta'_3(z_2 - i\alpha_1)}{\theta_3(z_2 - i\alpha_1)} &= \frac{d}{d(i\alpha_1)} \left\{ \log \frac{\theta_3(i\alpha_1)}{\theta_3(z_2 - i\alpha_1)} \right\} \\ &= -i\pi + \frac{d}{d(i\alpha_1)} \left\{ \log \frac{\theta_3(i\alpha_1)}{\theta_2(i\alpha_1)} \right\} \\ &= -i\pi + \frac{2K}{i} \frac{d}{d\varphi_1} \left\{ \log \frac{\operatorname{dn}(i\varphi_1; k)}{\operatorname{cn}(i\varphi_1; k)} \right\} \\ &= -i\pi + \frac{2K}{i} \frac{d}{d\varphi_1} \left\{ \log \operatorname{dn}(\varphi_1; k') \right\} \\ &= -i\pi + i2K k'^2 \frac{\operatorname{sn}(\varphi_1; k') \operatorname{cn}(\varphi_1; k')}{\operatorname{dn}(\varphi_1; k')} \end{aligned}$$

La relation (110) prend la forme :

$$k'^2 \frac{\operatorname{sn}(\varphi_1; k') \operatorname{cn}(\varphi_1; k')}{\operatorname{dn}(\varphi_1; k')} \left\{ \prod(\nu_1; k) + \prod(\nu_2; k) \right\} = \frac{\pi}{2} + K k'^2 \frac{\operatorname{sn}(\varphi_1; k') \operatorname{cn}(\varphi_1; k')}{\operatorname{dn}(\varphi_1; k')}$$

Soit :

$$\prod(\nu_1; k) + \prod(\nu_2; k) - K = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{dn}(\varphi_1; k')}{k'^2 \operatorname{sn}(\varphi_1; k') \operatorname{cn}(\varphi_1; k')}$$

or

$$\frac{dn(\varphi_i; k')}{k'^2 \sin(\varphi_i; k') \cos(\varphi_i; k')} = \frac{1}{[(1+\nu_1)(1+\nu_2)]^{1/2}}$$

La relation (105) est vérifiée.

Des calculs identiques, faits pour les intervalles

$$-k^2 < \nu_1 < 0$$

et

$$\nu_1 \neq 0$$

donnent respectivement les résultats suivants :

$$\Pi(\nu_1; k) + \Pi(\nu_2; k) - K = 0$$

$$\Pi(\nu_1; k) + \Pi(\nu_2; k) - K = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{(1+\nu_1)(1+\nu_2)}}$$

F O R M U L A ' I R E

FONCTIONS THETA -

$$\begin{aligned} \tau &= i \frac{k'}{k} & q &= e^{i\pi\tau} & \nu &= \frac{\mu}{2k} & A &= \prod (1 - q^{2n}) \\ \theta_1(\nu/q) &= 2 q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin(2n+1)\pi\nu & &= 2 A q^{1/4} \sin\pi\nu \prod (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi\nu + q^{4n}) \\ \theta_2(\nu/q) &= 2 q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \cos(2n+1)\pi\nu & &= 2 A q^{1/4} \cos\pi\nu \prod (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi\nu + q^{4n}) \\ \theta_3(\nu/q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi\nu & &= A \prod (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi\nu + q^{4n-2}) \\ \theta_4(\nu/q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi\nu & &= A \prod (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi\nu + q^{4n-2}) \end{aligned}$$

- zéros des fonctions thêta

$\theta_1(\nu/q)$	$\theta_2(\nu/q)$	$\theta_3(\nu/q)$	$\theta_4(\nu/q)$
$m + n\tau$	$m + 1/2 + n\tau$	$m + 1/2 + (n + 1/2)\tau$	$m + (n + 1/2)\tau$

- changement d'argument : Tableau 1

$$- \theta'(0/q) = \pi \theta_2(0/q) \cdot \theta_3(0/q) \cdot \theta_4(0/q)$$

- formules des carrés des fonctions thêta

$$\begin{aligned} \theta_2^2(\nu/q) \cdot \theta_4^2(0/q) &= \theta_4^2(\nu/q) \cdot \theta_2^2(0/q) - \theta_1^2(\nu/q) \cdot \theta_3^2(0/q) \\ \theta_3^2(\nu/q) \cdot \theta_4^2(0/q) &= \theta_4^2(\nu/q) \cdot \theta_3^2(0/q) - \theta_1^2(\nu/q) \cdot \theta_2^2(0/q) \\ \theta_1^2(\nu/q) \cdot \theta_4^2(0/q) &= \theta_3^2(\nu/q) \cdot \theta_2^2(0/q) - \theta_2^2(\nu/q) \cdot \theta_3^2(0/q) \\ \theta_4^2(\nu/q) \cdot \theta_4^2(0/q) &= \theta_3^2(\nu/q) \cdot \theta_3^2(0/q) - \theta_2^2(\nu/q) \cdot \theta_2^2(0/q) \\ \theta_2^4(0/q) + \theta_4^4(0/q) &= \theta_3^4(0/q) \end{aligned}$$

- Formules d'addition

$$\begin{aligned} \theta_2(\nu+\omega) \cdot \theta_2(\nu-\omega) \cdot \theta_4^2 &= \theta_4^2(\nu) \cdot \theta_2^2(\omega) - \theta_1^2(\nu) \cdot \theta_3^2(\omega) \\ &= \theta_2^2(\nu) \cdot \theta_4^2(\omega) - \theta_3^2(\nu) \cdot \theta_1^2(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_3(n+\omega) \cdot \theta_3(n-\omega) \cdot \theta_4^2 &= \theta_4^2(n) \cdot \theta_3^2(\omega) - \theta_1^2(n) \theta_2^2(\omega) \\
 &= \theta_3^2(n) \cdot \theta_4^2(\omega) - \theta_2^2(n) \theta_1^2(\omega) \\
 \theta_4(n+\omega) \cdot \theta_4(n-\omega) \cdot \theta_4^2 &= \theta_3^2(n) \cdot \theta_3^2(\omega) - \theta_2^2(n) \theta_2^2(\omega) \\
 &= \theta_4^2(n) \cdot \theta_4^2(\omega) - \theta_1^2(n) \theta_1^2(\omega) \\
 \theta_4(n+\omega) \cdot \theta_4(n-\omega) \theta_2^2 &= \theta_4^2(n) \theta_2^2(\omega) + \theta_3^2(n) \theta_1^2(\omega) \\
 &= \theta_2^2(n) \theta_4^2(\omega) + \theta_1^2(n) \theta_3^2(\omega) \\
 \theta_4(n+\omega) \cdot \theta_4(n-\omega) \theta_3^2 &= \theta_4^2(n) \theta_3^2(\omega) + \theta_2^2(n) \theta_1^2(\omega) \\
 &= \theta_3^2(n) \theta_4^2(\omega) + \theta_1^2(n) \theta_2^2(\omega)
 \end{aligned}$$

$$\theta_1(2\pi/q) = \frac{2 \theta_1(\pi) \cdot \theta_2(\pi) \theta_3(\pi) \theta_4(\pi)}{\theta_2(0) \theta_3(0) \theta_4(0)}$$

$$\theta_2(2\pi/q) = \frac{\theta_2^2(\pi) \theta_3^2(\pi) - \theta_1^2(\pi) \theta_4^2(\pi)}{\theta_2(0) \theta_3^2(0)}$$

$$\theta_3(2\pi/q) = \frac{\theta_2^2(\pi) \theta_3^2(\pi) + \theta_1^2(\pi) \theta_4^2(\pi)}{\theta_2^2(0) \theta_3(0)}$$

$$\theta_4(2\pi/q) = \frac{\theta_3^4(\pi) - \theta_2^4(\pi)}{\theta_4^3(0)} = \frac{\theta_4^4(\pi) - \theta_1^4(\pi)}{\theta_4^3(0)}$$

- Transformation de JACOBI

$$\tau' = -\frac{1}{\tau} \quad q' = e^{-i\pi \frac{1}{\tau}} = e^{-i\pi \frac{k'}{k}} \quad \pi' = \frac{\pi}{\tau} =$$

$$\begin{aligned}
 \theta_1(\pi'/q') &= -i \sqrt{\frac{k}{k'}} e^{i\pi \frac{k'}{k}} \theta_1(\pi/q) \\
 \theta_2(\pi'/q') &= \sqrt{\frac{k}{k'}} e^{i\pi \frac{k'}{k}} \theta_4(\pi/q) \\
 \theta_3(\pi'/q') &= \sqrt{\frac{k}{k'}} e^{i\pi \frac{k'}{k}} \theta_3(\pi/q) \\
 \theta_4(\pi'/q') &= \sqrt{\frac{k}{k'}} e^{i\pi \frac{k'}{k}} \theta_2(\pi/q)
 \end{aligned}$$

- Transformation de LANDEN

$$\theta_1(0/q^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left[\theta_2^2(0) \theta_1'(0) \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{\theta_2(0) \theta_1'(0)}{[\theta_3(0) \theta_4(0)]^{1/2}}$$

$$\theta_2(0/q^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\theta_3^2(0) - \theta_4^2(0) \right]^{1/2}; \quad \theta_3(0/q^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\theta_3^2(0) + \theta_4^2(0) \right]^{1/2}; \quad \theta_4(0/q^2) = [\theta_3(0) \cdot \theta_4(0)]^{1/2}$$

$$\theta_1(2\pi/q^2) = \frac{\theta_1(\pi/q) \theta_2(\pi/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

$$\theta_4(2\pi/q^2) = \frac{\theta_3(\pi/q) \cdot \theta_4(\pi/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

$$\theta_2(2v/q) = \frac{\theta_3^2(v/q) - \theta_4^2(v/q)}{2 \theta_2(0/q^2)} = \frac{\theta_2^2(v/q) - \theta_1^2(v/q)}{2 \theta_3(0/q^2)}$$

$$\theta_3(2v/q) = \frac{\theta_3^2(v/q) + \theta_4^2(v/q)}{2 \theta_3(0/q^2)} = \frac{\theta_2^2(v/q) + \theta_1^2(v/q)}{2 \theta_2(0/q^2)}$$

- Développements en série de FOURIER

$$\frac{\theta_1'(v/q)}{\theta_1(v/q)} = \pi \cot_g(\pi v) + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2m\pi v$$

$$\frac{\theta_2'(v/q)}{\theta_2(v/q)} = -\pi \operatorname{tg}(\pi v) + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2m\pi v$$

$$\frac{\theta_3'(v/q)}{\theta_3(v/q)} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2m\pi v ; \quad \frac{\theta_4'(v/q)}{\theta_4(v/q)} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2m\pi v$$

$$\log \pi \frac{\theta_1(v/q)}{\theta_1(0/q)} = \log(\sin \pi v) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \frac{\sin^2 m\pi v}{n}$$

$$\log \frac{\theta_2(v/q)}{\theta_2(0/q)} = \log(\cos \pi v) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \frac{\sin^2 m\pi v}{n}$$

$$\log \frac{\theta_3(v/q)}{\theta_3(0/q)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n}} \frac{\sin^2 m\pi v}{n} ; \quad \log \frac{\theta_4(v/q)}{\theta_4(0/q)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \frac{\sin^2 m\pi v}{n}$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{\theta_1(v+w)}{\theta_1(v-w)} = \frac{1}{2} \log \frac{\sin \pi(v+w)}{\sin \pi(v-w)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi w$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{\theta_2(v+w)}{\theta_2(v-w)} = \frac{1}{2} \log \frac{\cos \pi(v+w)}{\cos \pi(v-w)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{n} \frac{1}{1-q^{2n}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi w$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{\theta_3(v+w)}{\theta_3(v-w)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi w$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(v+w)}{\theta_4(v-w)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi w$$

FONCTIONS DE JACOBI -

$$E = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$q = E + 2E^5 + 15E^{13} + 150E^{17} + 1707E^{21} + \dots$$

$$k = \frac{\theta_2^2(0/q)}{\theta_3^2(0/q)}$$

$$k' = \frac{\theta_4^2(0/q)}{\theta_3^2(0/q)}$$

$$r = \frac{u}{2K}$$

$$\operatorname{sn}(u; k) = \frac{\theta_3}{\theta_2} \cdot \frac{\theta_1(v/q)}{\theta_4(v/q)} ;$$

$$\operatorname{cn}(u; k) = \frac{\theta_4}{\theta_2} \cdot \frac{\theta_2(v/q)}{\theta_4(v/q)} ;$$

$$\operatorname{dn}(u; k) = \frac{\theta_4}{\theta_3} \cdot \frac{\theta_3(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

- Tableau de changement d'argument

- Tableau de pôles - période et zéros

- Formules d'addition

$$\operatorname{sn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \pm \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{cn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \mp \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{dn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \mp k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$$

$$\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u$$

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{1 - \operatorname{cn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u} ; \quad \operatorname{cn}^2 u = \frac{\operatorname{cn} 2u + \operatorname{dn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u} ; \quad \operatorname{dn}^2 u = \frac{\operatorname{dn} 2u + k^2 \operatorname{cn} 2u + k'^2}{1 + \operatorname{dn} 2u}$$

- Dérivées

$$\frac{d(\operatorname{am} u)}{du} = \operatorname{dn} u ; \quad \frac{d(\operatorname{sn} u)}{du} = \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u ; \quad \frac{d(\operatorname{cn} u)}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u ; \quad \frac{d(\operatorname{dn} u)}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$$

- Transformation imaginaire de JACOBI

$$\operatorname{sn}(iu; k') = i \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}$$

$$\operatorname{cn}(iu; k') = \frac{1}{\operatorname{cn}(u; k)}$$

$$\operatorname{dn}(iu; k') = \frac{\operatorname{dn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}$$

- Dégénérescence

$$k=0 ; \quad k'=1$$

$$\operatorname{sn} u = \sin u$$

$$\operatorname{cn} u = \cos u$$

$$\operatorname{dn} u = 1$$

$$k = \pi/2$$

$$k' = \infty$$

$$k'=0 ; \quad k=1$$

$$\operatorname{sn} u = \tanh u$$

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u}$$

$$k = \infty$$

$$k' = \pi/2$$

- Tableau de changement de modules

- Développement de MAC LAURIN au voisinage de zéro

$$\operatorname{sn}(u; k) = u - (1+k^2) \frac{u^3}{3!} + (1+14k^2+k^4) \frac{u^5}{5!} - (1+135k^2+135k^4+k^6) \frac{u^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{cn}(u; k) = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1+4k^2) \frac{u^4}{4!} - (1+44k^2+16k^4) \frac{u^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{dn}(u; k) = 1 - k^2 \frac{u^2}{2!} + k^2(k^2+4) \frac{u^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4) \frac{u^6}{6!} + \dots$$

- Développement en série de FOURIER

$$\operatorname{sn}(u; k) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{q^{p+1/2}}{1-q^{2p+1}} \sin(2p+1)\pi v$$

$$\operatorname{cn}(u; k) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{q^{p+1/2}}{1+q^{2p+1}} \cos(2p+1)\pi v$$

$$\operatorname{dn}(u; k) = \frac{2\pi}{K} \left\{ \frac{1}{4} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q^p}{1+q^{2p}} \cos p\pi v \right\}$$

INTEGRALES ELLIPTIQUES -

1 Calcul de $F(\phi; k)$ par la méthode de LANDEN

Calcul de $F(\phi; k)$
suite des modules k_n décroissante

$$k_p = \frac{1 - \sqrt{1-k_{p-1}^2}}{1 + \sqrt{1-k_{p-1}^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_p - \varphi_{p-1}) = \sqrt{1-k_{p-1}^2} \operatorname{tg} \varphi_{p-1}$$

$$F(\phi; k) = \Phi_n \prod \frac{1+k_p}{2}$$

Calcul de $F(\phi; k)$
suite des modules k_n croissante

$$k_p = \frac{2\sqrt{k_{p-1}}}{1+k_{p-1}}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_{p-1} - \varphi_p) = \sqrt{1-k_p^2} \operatorname{tg} \varphi_p$$

$$F(\phi; k) = k_n \sqrt{\frac{k_1 k_2 \dots k_{n-1}}{k}} \operatorname{tg} \left\{ \varphi_p \left| \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_n}{2} \right| \right\}$$

2. Intégrale elliptique de première espèce-notation de JACOBI

$$K = \frac{\pi}{2} \Theta_3^2(0/q)$$

3. Intégrales elliptiques de 2ème espèce

$$E(u; k) = \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(\pi/4)}{\theta_4(\pi/4)} + u \frac{E}{K} = Z(u; k) + u \frac{E}{K}$$

$$E(k; k) = K - \frac{1}{4K} \frac{\theta''_4(0)}{\theta_4(0)}$$

$$E(u+2k; k) = E(u; k) + E(2k; k) \quad E(2k) = 2E(k)$$

$$E(u+2ik'; k) = E(u; k) + E(2ik'; k) \quad \Rightarrow \quad E(u+2mK) = E(u) + 2mE(K)$$

- Formule d'addition

$$E(u+a) + E(u-a) = 2E(u) - \frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}$$

$$E(2u) = 2E(u) - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn} 2u.$$

- Transformation de JACOBI

$$E(iu; k) + iE(u; k') = iu + i \operatorname{sn}(u; k') \frac{\operatorname{dn}(u; k')}{\operatorname{cn}(u; k')}$$

$$E(2ik'; k) = 2i(K' - E')$$

- Relation de LEGENDRE

$$KE' + EK' - KK' = \pi/2$$

4. Fonction Z(u; k)

$$Z(u; k) = \frac{1}{2K} \frac{\theta'_4(\pi/4)}{\theta_4(\pi/4)} = E(u; k) - u \frac{E}{K}$$

$$Z(u+2k) = Z(u) \quad Z(u+2ik') = Z(u) - i \frac{\pi}{K}$$

$$Z(0) = 0 \quad Z(k) = 0 \quad Z'(0) = 1 - \frac{E}{K}$$

- Formule d'addition

$$Z(u+a) = Z(u) + Z(a) - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+a)$$

- Transformation imaginaire de JACOBI

$$iZ(iu; k) = Z(u; k') - \operatorname{dn}(u; k') \frac{\operatorname{sn}(u; k')}{\operatorname{cn}(u; k')} + \frac{\pi u}{2KK'}$$

5. Intégrales elliptiques de 3ème espèce

$$\Pi(u; -k^2 \operatorname{sn}^2(a; k); k) = u + \frac{\operatorname{sn}(a; k)}{\operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{do} \frac{\theta_4(\pi-\beta/4)}{\theta_4(\pi+\beta/4)} + u Z(a) \right\}$$

$$\begin{aligned}\Pi^*(u; a; k) &= \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn}(a; k) \operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(a; k) \operatorname{sn}^2(t; k)} \cdot \operatorname{sn}^2(t; k) dt \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(n-\beta/q)}{\theta_4(n+\beta/q)} + u Z(a)\end{aligned}$$

$$\Pi(u; -k^2 \operatorname{sn}^2(a; k); k) = u + \frac{\operatorname{sn}(a; k)}{\operatorname{cn}(a; k) \operatorname{dn}(a; k)} \Pi^*(u; a; k)$$

$$\Pi^*(u; a) - \Pi^*(a; u) = u Z(a) - a Z(u) = u E(a) - a E(u)$$

$$\Pi^*(u+2k; a) = \Pi^*(u; a) + 2K Z(a)$$

$$\Pi^*(u+2ik'; a) = \Pi^*(u; a) + 2iK' Z(a) + \pi i \frac{a}{K}$$

- Formules d'addition

$$\Pi^*(x; a) + \Pi^*(y; a) - \Pi^*(x+y; a) = \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(\xi-\beta) \cdot \theta_4(\eta-\beta) \theta_4(\xi+\eta+\beta)}{\theta_4(\xi+\beta) \cdot \theta_4(\eta+\beta) \theta_4(\xi+\eta-\beta)}$$

$$\begin{aligned}\Pi^*(u; a) + \Pi^*(u; b) - \Pi^*(u; a+b) &= \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(n-\beta) \theta_4(n-\delta) \theta_4(n+\beta+\delta)}{\theta_4(n+\beta) \theta_4(n-\delta) \theta_4(n-\beta-\delta)} \\ &\quad + u k^2 \operatorname{sn}(a; k) \operatorname{sn}(b; k) \operatorname{sn}(a+b; k)\end{aligned}$$

- Transformation imaginaire de JACOBI

$$\Pi^*(iu; ia+k; k) = \Pi^*(u; a+k'; k')$$

$$\Pi^*(iu; a+k; k) = -\Pi^*(u; ia+k'; k')$$

- Calcul de l'intégrale elliptique de 3ème espèce

$$\begin{aligned}u \in]-\infty; -1] \quad v &= 1/\operatorname{sn}^2(\varphi; k) \\ \frac{\operatorname{cn}(\varphi; k) \operatorname{dn}(\varphi; k)}{\operatorname{sn}(\varphi; k)} \Pi\left(u; -\frac{1}{\operatorname{sn}^2(\varphi; k)}; k\right) &= \frac{1}{2} \log \frac{\theta_1(n-d/q)}{\theta_1(n+d/q)} + \frac{\theta_1'(d/q)}{\theta_4(d/q)} v \quad |v| > \beta \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\theta_1(d+n/q)}{\theta_1(d-n/q)} - \frac{\theta_1'(n/q)}{\theta_4(n/q)} v \quad |v| < \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u \in [-1; -k^2] \quad v &= -\operatorname{dn}^2(\varphi; k') \\ k'^2 \frac{\operatorname{cn}(\varphi; k') \operatorname{sn}(\varphi; k')}{\operatorname{dn}(\varphi; k')} \Pi\left(u; -\operatorname{dn}^2(\varphi; k'); k\right) &= \frac{1}{2i} \log \frac{\theta_2(n-id/q)}{\theta_2(n+id/q)} - i \frac{\theta_3'(id/q)}{\theta_3(id/q)}\end{aligned}$$

$$\nu \in [-k^2; 0]$$

$$\nu = -k^2 \sin^2(\varphi; k)$$

$$\frac{\operatorname{dn}(\varphi; k) \operatorname{dn}(\varphi; k)}{\operatorname{sn}(\varphi; k)} \Pi(\mu; -k^2 \sin^2(\varphi; k); k) = \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4(r+\beta/q)}{\theta_4(r-\beta/q)} + \frac{\theta_1'(\beta/q)}{\theta_1(\beta/q)} r$$

$$\nu \in [0; +\infty[$$

$$\nu = k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(\varphi; k')}{\operatorname{cn}^2(\varphi; k')}$$

$$\frac{\operatorname{dn}(\varphi; k')}{\operatorname{sn}(\varphi; k') \cdot \operatorname{cn}(\varphi; k')} \Pi(\mu; k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(\varphi; k')}{\operatorname{cn}^2(\varphi; k')}; k) = \frac{1}{2i} \log \frac{\theta_4(r+id/q)}{\theta_4(r-id/q)} + i \frac{\theta_1'(id)}{\theta_1(id)} r$$

- Intégrale elliptique complète

$$\Pi(\nu_1; k) + \Pi(\nu_2; k) - K = \Re \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1+\nu_1)(1+\nu_2)}} \right\} \cdot \frac{\Pi}{2}$$

$$\nu_1 \cdot \nu_2 = k^2$$

EQUATIONS GENERALES DES ECOULEMENTS
EN MILIEU PERMEABLE

Deuxième partie

CHAPITRE 1

-:-:-

EQUATIONS GENERALES DES ECOULEMENTS

EN MILIEU PERMEABLE

1,1 - EXPERIENCE FONDAMENTALE - LOI DE DARCY -

Un tube cylindrique, horizontal, T contient un matériau perméable. Les extrémités du tube, fermées par deux grilles G_1 et G_2 , sont reliées à deux réservoirs R_1 et R_2 entre lesquels existe une différence de charge ΔH .

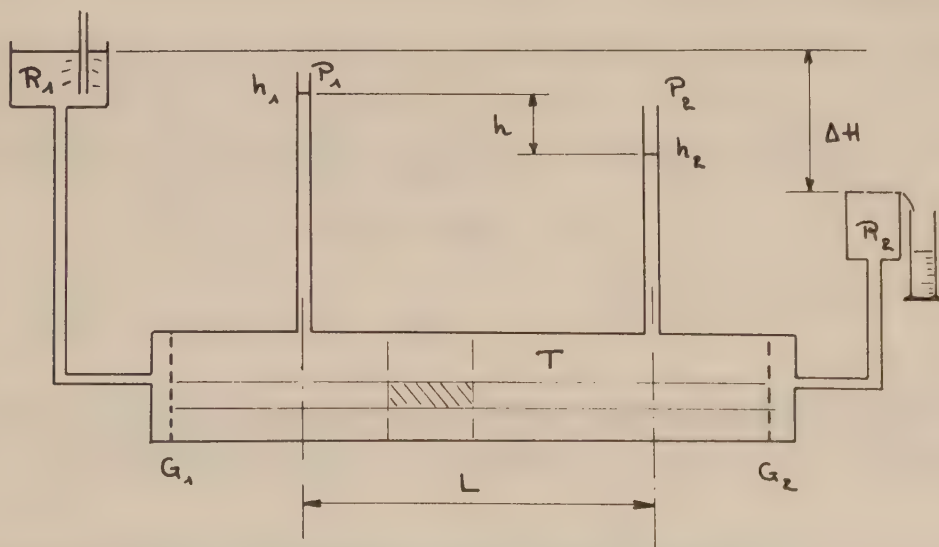


Fig. 1

Deux piézomètres P_1 et P_2 , branchés sur deux prises de pression, permettent la mesure des hauteurs piézométriques h_1 et h_2 dans deux sections droites distantes d'une longueur L .

Le fluide écoulé à travers le matériau perméable, est recueilli dans une éprouvette graduée.

Pour une valeur donnée de la différence de charge ΔH , on mesure le débit Q et la différence des deux hauteurs piézométriques :

$$h = h_1 - h_2$$

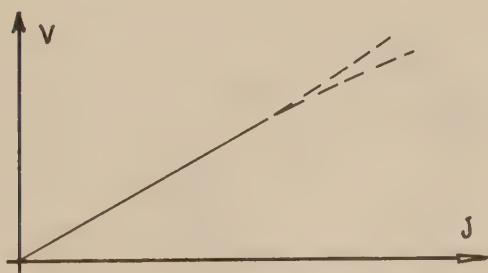
On en déduit d'une part, la vitesse apparente de l'écoulement, encore appelée vitesse "brute" :

$$(1) \quad v_B = \frac{Q}{S} \quad ,$$

S étant la section du cylindre, et d'autre part, le gradient hydraulique correspondant :

$$(2) \quad j = \frac{h}{L}$$

En recommençant les mesures pour une série de valeurs de ΔH , il est alors possible de tracer la courbe représentative des variations de V en fonction du gradient hydraulique j .



On constate que, pour des gradients assez faibles, cette courbe est voisine d'une droite qui passe par l'origine.

DARCY a posé :

$$(3) \quad V = A.j$$

Fig. 2

Le coefficient de proportionnalité A est appelé coefficient de perméabilité; il a les dimensions d'une vitesse. L'énoncé de la loi de DARCY est :

La vitesse "brute" d'un écoulement en milieu perméable est proportionnelle au gradient hydraulique.

1,2 - EQUATION GENERALE DES ECOULEMENTS RAMPANTS -

Par définition, un écoulement est dit rampant si ces forces d'inertie sont négligeables.

Or, l'équation générale de la dynamique des fluides isovolumes s'écrit :

$$(4) \quad \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \vec{F} - \gamma + \nu \Delta \vec{v}$$

en appelant : $\vec{v}$ la vitesse d'une particule,
 ν la viscosité cinématique du fluide,
 $\vec{F}$ le champ de force par unité de masse,
 ρ la masse volumique du fluide,
 γ l'accélération d'une particule.

Lorsque le champ de force $\vec{F}$ se réduit à celui de la pesanteur, l'équation (4) s'écrit :

$$\operatorname{grad} (p + \rho gh) = \rho \nu \Delta \vec{v},$$

ou bien :

$$(5) \quad \operatorname{grad} p^* = \eta \Delta \vec{v},$$

η étant le coefficient de viscosité dynamique.

Calculons la divergence des deux membres de l'équation (5) ; on obtient :

$$(6) \quad \operatorname{div} (\operatorname{grad} p) = \eta \left\{ \operatorname{div} \left[\operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{v}) - \operatorname{Rot} (\operatorname{Rot} \vec{v}) \right] \right\}$$

soit, compte tenu de l'équation de continuité : $\operatorname{div} \vec{v} = 0$:

$$(7) \quad \Delta p^* = 0$$

Dans un écoulement rampant, la pression étoilée satisfait donc à l'équation de LAPLACE.

La charge hydraulique h , liée à la pression étoilée par la relation :

$$h = \frac{p^*}{\omega}$$

est aussi une fonction harmonique.

1,3 - GENERALISATION DE LA LOI DE DARCY -

Soit un domaine (τ) traversé par un écoulement rampant. Le fluide contenu dans ce domaine est soumis à un champ harmonique de pressions étoilées ; il est possible de tracer le réseau des surfaces isobares ⁽¹⁾ S.

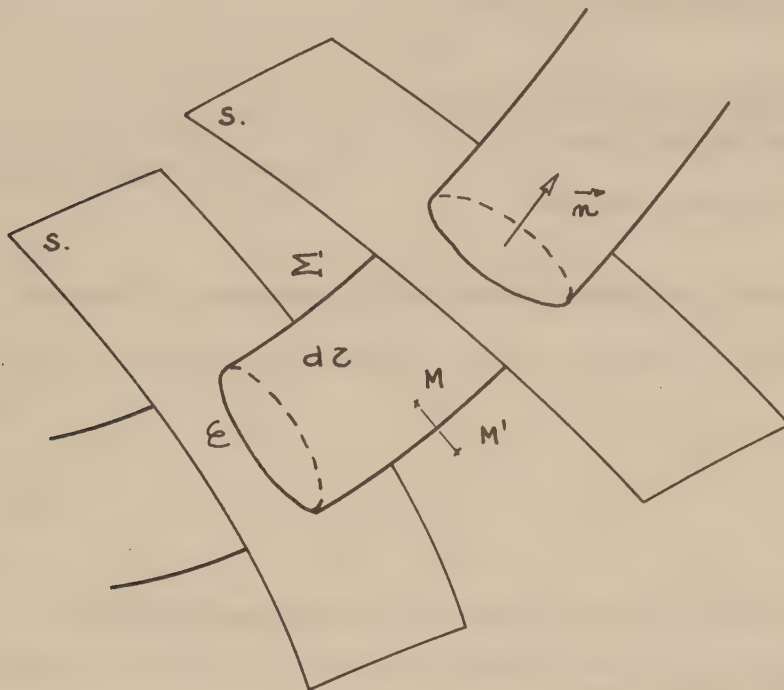


Fig. 3

Considérons un élément de volume $d\tau$ intérieur à un cylindre Σ engendré par les trajectoires orthogonales des surfaces S, s'appuyant sur une courbe $\mathcal{C}$, et limité par deux surfaces isobares très voisines.

Cet élément $d\tau$ est suffisamment petit par rapport à l'échelle du modèle étudié, et suffisamment grand vis-à-vis des dimensions des grains constituant le matériau perméable.

Un petit déplacement $\vec{MM'}$, normal à la surface Σ , n'entraîne aucune variation de pression. Il n'y a donc pas de migration d'ensemble du fluide de part et d'autre du tube Σ ; pour l'écoulement moyen, Σ se comporte donc comme un tube de courant. Si le rayon de courbure du tube est suffisamment grand vis-à-vis du diamètre des grains du matériau, l'écoulement dans le volume $d\tau$ est comparable à celui que l'on observe dans un cylindre élémentaire de l'expérience de DARCY. Le module de la vitesse brute est alors proportionnel au gradient hydraulique.

$$V_B = A \cdot \frac{dh}{dn}$$

dn étant un déplacement sur la normale aux isobares.

(1) Nous avons appelé ici, surfaces "isobares", les surfaces sur lesquelles la pression étoilée est constante.

Cette vitesse $\vec{V}_B$ est orientée suivant la direction de $\vec{n}$, dans le sens des charges décroissantes. On a vectoriellement :

$$\vec{V}_B = - A \text{ grad } h$$

ou bien :

$$\vec{V}_B = - A \text{ grad } \left(\frac{P}{\omega} + z \right)$$

soit :

$$(8) \quad \vec{V}_B = \text{grad } \phi$$

en posant :

$$(9) \quad \phi = - A \left(\frac{P}{\omega} + z \right)$$

La vitesse brute d'un écoulement en milieu perméable dérive d'un potentiel scalaire ϕ tel que :

$$(10) \quad \Delta \phi = 0$$

D'après les formules (8) et (10), la vitesse brute telle que nous l'avons introduite, définit un champ de vecteurs à flux conservatif.

La solution analytique d'un problème d'écoulement d'infiltration se ramène à la résolution de l'équation de LAPLACE.

1,4 - CONDITIONS AUX LIMITES -

La résolution de l'équation de LAPLACE exige la connaissance des conditions aux limites ; nous distinguerons :

- les parois perméables, qui constituent une surface de courant (fig. 4a). La condition s'exprime par $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$.

- les surfaces délimitant le milieu perméable, et qui sont en contact avec une masse d'eau au repos (fig. 4b). Elles constituent des surfaces équipotentielles, d'après la définition même du potentiel :

$$\phi = - A \left(\frac{P}{\omega} + z \right)$$

- les surfaces libres (fig. 4c) qui sont des surfaces de courant et telles que : $\phi = -Az + C^{te}$.

- les surfaces de suintement telles que $\phi = -Az + C^{te}$ mais qui ne constituent pas des surfaces de courant (fig. 4d).

- les surfaces délimitant deux milieux de perméabilité différente A_1 et A_2 , et qui donnent lieu à une réfraction des lignes de courant (fig. 4e). La condition de continuité des vitesses normales s'écrit :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

et la condition sur les vitesses tangentielles est alors :

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \ell} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \ell}$$

$d\ell$ étant un élément de longueur pris sur la tangente à la surface.

- les tapis filtrants ou les drains de pied que l'on assimile pratiquement à des équipotentielles (fig. 4f).

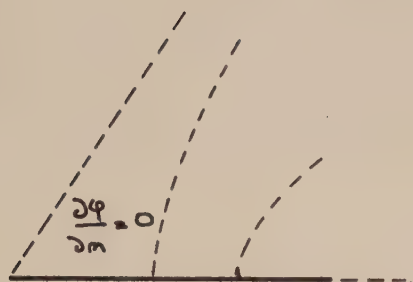


Fig. 4a

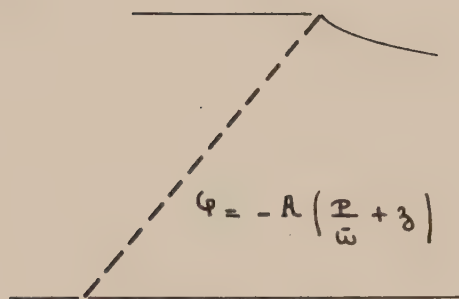


Fig. 4b

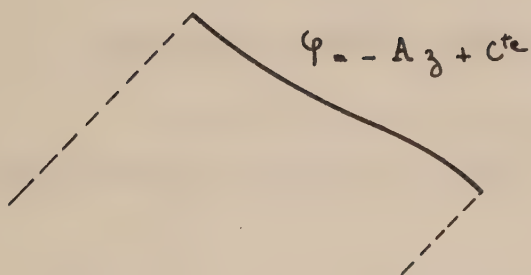


Fig. 4c

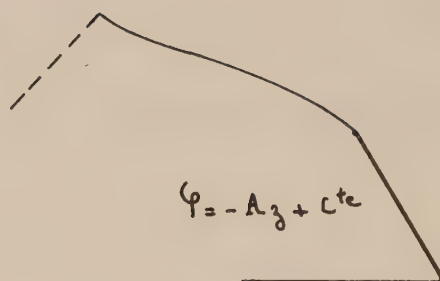


Fig. 4d

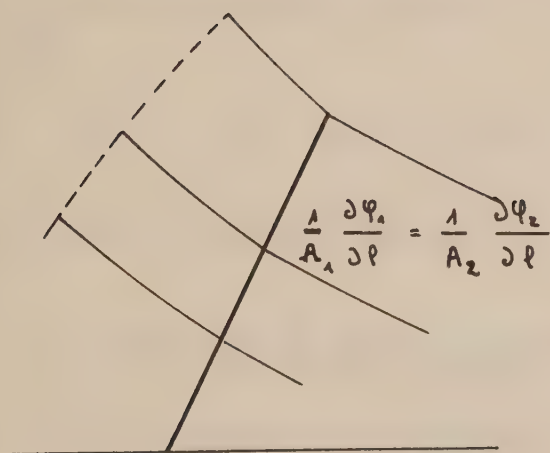


Fig. 4e

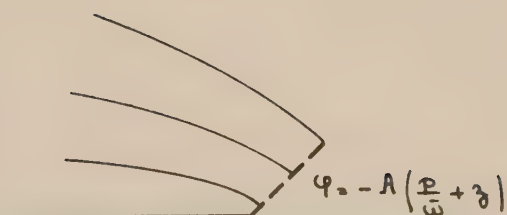


Fig. 4f

CHAPITRE 2

-:-:-

PROPRIETES PARTICULIERES DES ECOULEMENTS PLANS

2,1 - FONCTION DE POTENTIEL ET FONCTION DE COURANT -

Nous avons montré au Chapitre précédent, que la solution d'un écoulement d'infiltration satisfait à l'équation de LAPLACE :

$$(1) \quad \Delta \phi = 0$$

où ϕ est le potentiel des vitesses "brutes".

Dans le cas des écoulements plans, on associe à la fonction harmonique ϕ , la fonction harmonique conjuguée ψ , appelée fonction de courant. La fonction analytique :

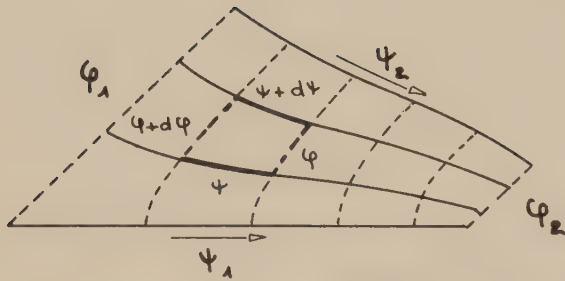
$$(2) \quad \xi(z) = \phi(x;y) + i\psi(x;y)$$

est appelée "potentiel complexe".

2,2 - COEFFICIENT DE DEBIT D'UN ECOULEMENT -

Considérons un écoulement d'infiltration à l'intérieur d'un domaine plan (τ).

Traçons le réseau des lignes équipotentielles et des lignes de courant.



Le débit élémentaire dq à travers un petit tube de courant limité par les lignes de courant ψ et $\psi + d\psi$ est égal à :

$$dq = d\psi$$

Si l'on choisit pour construire le réseau :

$$d\phi = d\psi$$

Fig. 1

on obtient un réseau quadratique orthogonal. Soit n le nombre de carrés compris entre les lignes ϕ_1 et ϕ_2 , on a :

$$dq = d\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{n}$$

Si m est le nombre de tubes de courant élémentaires, compris entre les lignes de courant extérieures ψ_1 , ψ_2 , le débit total sera :

$$(3) \quad q = \frac{m}{n} (\phi_2 - \phi_1)$$

Exprimons ϕ par la relation (7) du chapitre précédent ; il vient :

$$q = + \frac{m}{n} \cdot A \cdot (H_1 - H_2)$$

Le coefficient de débit est, par définition égal à :

$$(4) \quad Cq = \frac{m}{n}$$

C'est un nombre sans dimension, caractéristique de la forme géométrique de l'écoulement ; il est indépendant de la nature du milieu perméable, des charges appliquées et des dimensions du domaine d'infiltration.

Le débit s'exprime alors par :

$$q = Cq (\phi_2 - \phi_1) = \psi_2 - \psi_1$$

on a donc :

$$(6) \quad z = \operatorname{sn}(Z, k)$$

Supposons maintenant que le rectangle (Ω) soit le siège d'un écoulement uniforme de vitesse V_0 parallèle à l'axe Ox . Les côtés CD et EB sont alors des lignes de courant, les côtés DE et BC des lignes équipotentiellles. La fonction de potentiel complexe correspondante est :

$$\xi = V_0 Z + C$$

L'écoulement transformé du plan z défini par la relation :

$$z = \operatorname{sn} \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{V_0} ; k \right\}$$

correspond aux conditions aux limites précisées sur la Fig. 3.

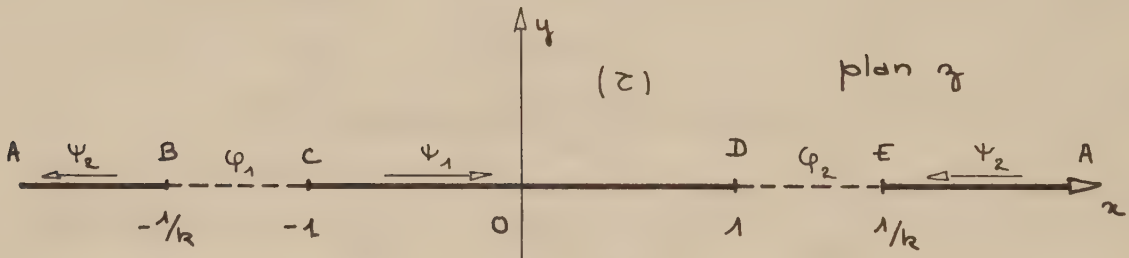


Fig. 3

Les constantes C et V_0 ont respectivement pour expression :

$$\xi_0 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + i \psi_1$$

$$V_0 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{K'} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2K}$$

Le coefficient de débit correspondant à l'écoulement du plan z est :

$$Cq = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\phi_2 - \phi_1}$$

Soit

$$Cq = \frac{K'}{2K}$$

Les lois de distribution de la fonction de potentiel et de la fonction de courant sur chacun des éléments de l'axe réel sont indiquées sur la planche I-a

Nous avons noté aussi sur la planche I-b les lois de distribution de la fonction de potentiel et de la fonction de courant relatives à l'écoulement.

$$z = \operatorname{sn} \left\{ i \frac{\xi - \xi_0}{V_0} ; k \right\}$$

$$2 - \text{Ecoulement } z = \operatorname{sn}^2 \left\{ \xi ; k \right\}$$

Considérons l'écoulement précédent

$$Z = \operatorname{sn} \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{V_0} ; k \right\}$$

s'effectuant dans le premier quadrant (Ω) du plan $Z = X + iY$ (Fig. 4)

Faisons subir à celui-ci la transformation en éventail de raison 2 :

$$z = Z^2$$

Le domaine (τ), homologue du domaine (Ω) est constitué du demi-plan situé au-dessus de l'axe réel Ox . Les conditions aux limites correspondant à l'écoulement du plan z , défini par la relation :

$$z = \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{V_0} ; k \right\}$$

avec

$$\xi_0 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + i\psi_1$$

$$V_0 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{K'} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2K}$$

sont précisées sur la Fig. 5.

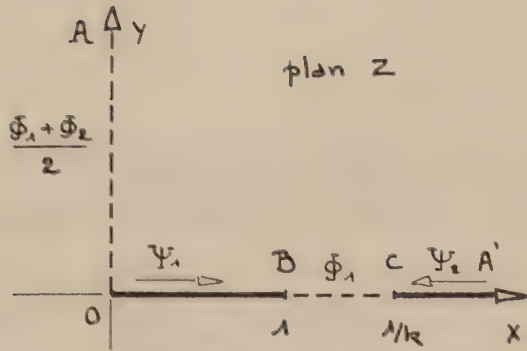


Fig. 4

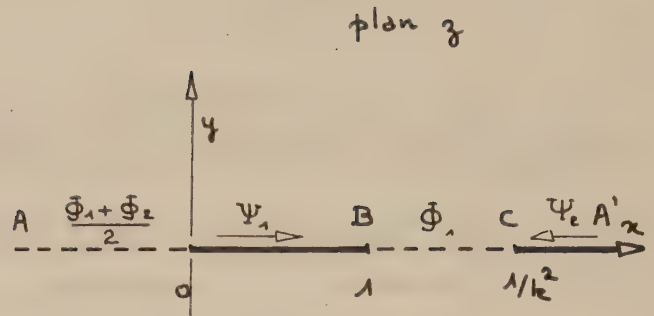


Fig. 5

Nous poserons :

$$\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \phi_2$$

$$\psi_1 = \psi_1$$

$$\phi_1 = \phi_1$$

$$\psi_2 = \psi_2$$

Avec ces nouvelles notations, l'écoulement du plan z , représenté sur la Fig. 6, est défini par la relation :

$$z = \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{V_0} ; k \right\}$$

avec

$$\xi_0 = \phi_2 + i\psi_1$$

$$V_0 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{K'} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{K}$$

Le coefficient de débit Cq s'écrit :

$$Cq = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{K'}{K}$$

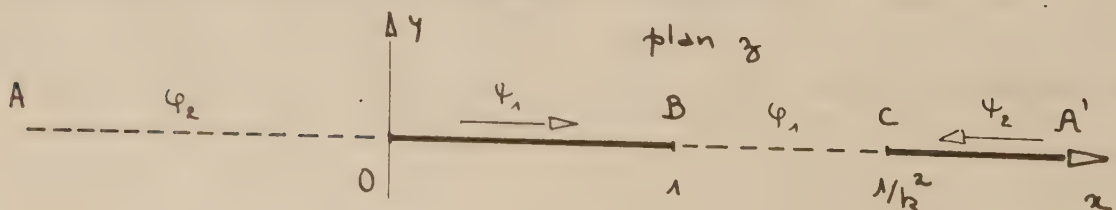


Fig. 6

Nous avons résumé sur la Planche II-a les caractéristiques de l'écoulement.

$$z = \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{v_0} ; k \right\}$$

et sur la planche II-b celles de l'écoulement :

$$z = \operatorname{sn}^2 \left\{ i \frac{\xi - \xi_0}{v_0} ; k \right\}$$

PLANCHE I-a

Fonction $z = \operatorname{sn} \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{V_0} ; k \right\}$



$$\xi_0 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + i\psi_1$$

$$V_0 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{K'} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2K}$$

$$Cq = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{K'}{2K}$$

Lois de distribution de la fonction de potentiel et de la fonction de courant:

- sur la demi droite AB :

$$\phi = (\phi_2 - \phi_1) \frac{u}{2K} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad \operatorname{sn}(u;k) = \frac{1}{kx}$$

- sur le segment BC :

$$\psi = (\psi_2 - \psi_1) \frac{u}{K'} + \psi_1 \quad \operatorname{dn}(u;k') = -\frac{1}{x}$$

- sur le segment CD :

$$\phi = (\phi_2 - \phi_1) \frac{u}{2K} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad \operatorname{sn}(u;k) = x$$

- sur le segment DE :

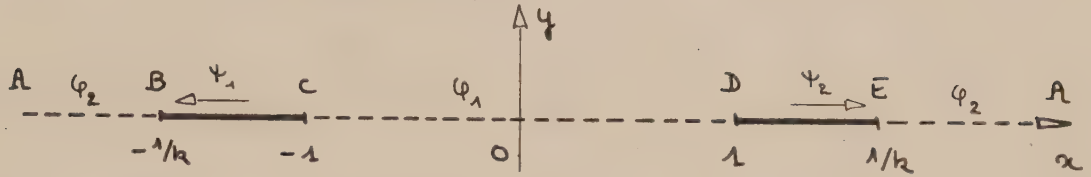
$$\psi = (\psi_2 - \psi_1) \frac{u}{K'} + \psi_1 \quad \operatorname{dn}(u;k') = \frac{1}{x}$$

- sur la demi droite EA' :

$$\phi = (\phi_2 - \phi_1) \frac{u}{2K} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad \operatorname{sn}(u;k) = \frac{1}{kx}$$

PLANCHE I-b

Fonction $z = \text{sn} \left\{ i \frac{\xi - \xi_0}{V_0} ; k \right\}$



$$\xi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} + i\phi_1$$

$$V_0 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{K} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2K'}$$

$$Cq = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{K}{2K'}$$

Lois de distribution de la fonction de potentiel et de la fonction de courant :

- sur la demi droite AB :

$$\psi = (\psi_2 - \psi_1) \frac{u}{2K'} + \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \quad \text{sn}(u; k') = \frac{1}{kx}$$

- sur le segment BC :

$$\phi = (\phi_2 - \phi_1) \frac{u}{K} + \phi_1 \quad \text{dn}(u; k) = - \frac{1}{x}$$

- sur le segment CD :

$$\psi = (\psi_2 - \psi_1) \frac{u}{2K'} + \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \quad \text{sn}(u; k') = x$$

- sur le segment DE :

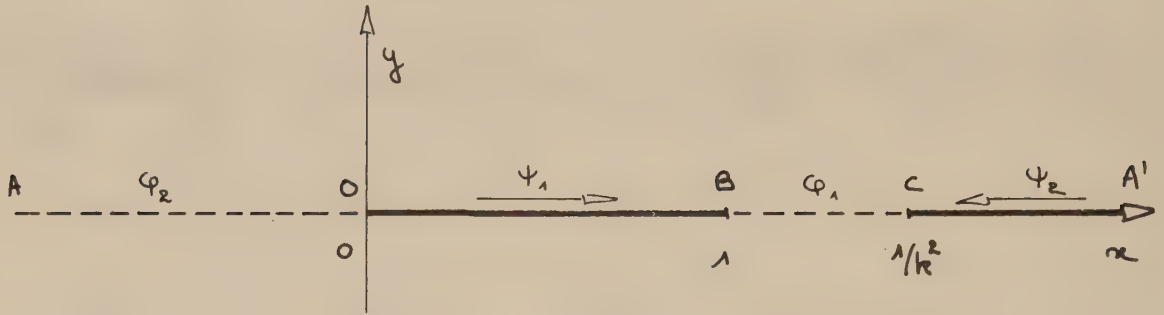
$$\phi = (\phi_2 - \phi_1) \frac{u}{K} + \phi_1 \quad \text{dn}(u; k) = \frac{1}{x}$$

- sur la demi droite EA' :

$$\psi = (\psi_2 - \psi_1) \frac{u}{2K'} + \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \quad \text{sn}(u; k') = \frac{1}{kx}$$

PLANCHE II-a

$$\text{Fonction } z = \text{sn}^2 \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{V_0} ; k \right\}$$



$$\xi_0 = \phi_2 + i\psi_1$$

$$V_0 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{K'} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{K}$$

Le coefficient de débit est :

$$Cq = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\phi_2 - \phi_1} \frac{K'}{K}$$

Lois de distribution de la fonction de potentiel et de la fonction de courant :

- sur la demi droite AO :

$$\psi = (\psi_2 - \psi_1) \frac{u}{K'} + \psi_1$$

$$\text{sn}(u; k') = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

- sur le côté OB :

$$\phi = (\phi_1 - \phi_2) \frac{u}{K} + \phi_2$$

$$\text{sn}(u; k) = \sqrt{x}$$

- sur le côté BC :

$$\psi = (\psi_2 - \psi_1) \frac{u}{K'} + \psi_1$$

$$\text{dn}(u; k') = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

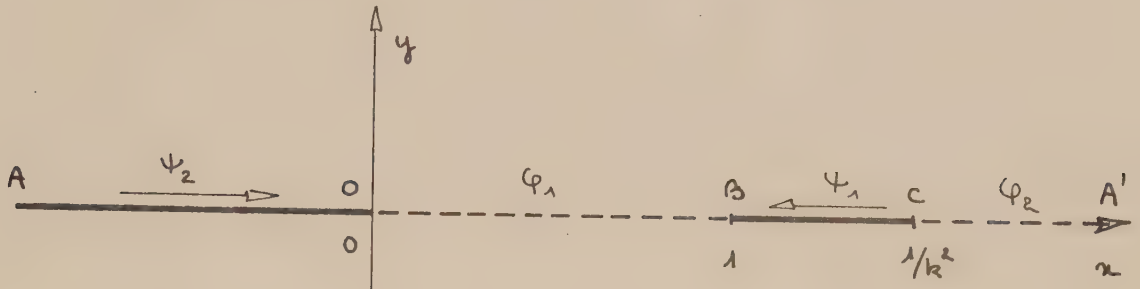
- sur la demi-droite CA' :

$$\phi = (\phi_1 - \phi_2) \frac{u}{K} + \phi_2$$

$$\text{sn}(u; k) = \frac{1}{k \sqrt{x}}$$

PLANCHE II-b

$$\text{Fonction } z = \text{sn}^2 \left\{ i \frac{\xi - \xi_0}{V_0} ; k \right\}$$



$$\xi_0 = \psi_2 + i\phi_1$$

$$V_0 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{K} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{K'}$$

Le coefficient de débit est :

$$Cq = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{K}{K'}$$

Lois de distribution de la fonction de potentiel et de la fonction de courant:

- sur la demi droite AO :

$$\phi = (\phi_2 - \phi_1) \frac{u}{K} + \phi_1$$

$$\text{sn}(u; k) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

- sur le côté OB :

$$\psi = (\psi_1 - \psi_2) \frac{u}{K'} + \psi_2$$

$$\text{sn}(u; k') = \sqrt{x}$$

- sur le côté BC :

$$\phi = (\phi_2 - \phi_1) \frac{u}{K} + \phi_1$$

$$\text{dn}(u; k) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- sur la demi-droite CA' :

$$\psi = (\psi_1 - \psi_2) \frac{u}{K'} + \psi_2$$

$$\text{sn}(u; k') = \frac{1}{k' \sqrt{x}}$$

Troisième partie

ETUDES DE QUELQUES PROBLEMES D'INFILTRATION

La troisième partie de notre étude est consacrée à la résolution de quelques écoulements d'infiltration en milieux poreux correspondant à des ouvrages classiques de génie civil tels que : rideaux de palplanches, murs parafouille, digues en terre...

Nous avons envisagé, selon le problème étudié, deux méthodes de résolution qui sont :

- a) la méthode des transformations analytiques : on fait correspondre à l'écoulement cherché un écoulement élémentaire connu, en lui appliquant une suite de transformations analytiques.
- b) la méthode des solutions particulières : le problème est alors résolu dans le plan $(\phi; \psi)$ du potentiel complexe, en cherchant une fonction analytique sous forme de série de FOURIER qui satisfasse aux conditions imposées.

Puis, pour chaque cas, la solution analytique est mise sous forme de résultats numériques utilisables directement pour un avant-projet d'ouvrage réel.

CHAPITRE 1

-:-:-

PROBLEMES RESOLUS

De nombreux problèmes d'infiltration ont déjà fait l'objet de publications. Mais bien souvent, du fait de la complexité des calculs, les auteurs n'ont résolu numériquement que quelques cas particuliers, ou bien ils ont dû procéder à des approximations.

Néanmoins, parmi les problèmes classiques complètement résolus, nous pouvons signaler :

- celui du rideau de palplanches⁽¹⁾ enfoncé en milieu perméable Fig. 1a.
- celui du rideau de palplanches⁽⁴⁾ avec décrochement enfoncé en milieu perméable Fig. 1b.
- celui du barrage⁽¹⁾ posé sur un terrain perméable. Fig. 1c.
- celui du barrage⁽¹⁾ posé sur un terrain perméable avec un rideau de palplanches. Fig. 1d.
- celui du mur parafouille⁽²⁾ Fig. 1e.
- celui d'une digue⁽³⁾ à parement vertical avec suintement. Fig. 1f.
- celui d'une digue⁽⁵⁾ à parement vertical avec filtre. Fig. 1g.
- celui d'une digue⁽⁴⁾ munie d'un drain de pied. Fig. 1h.

Nous nous sommes attachés à résoudre dans ce qui suit les trois écoulements suivants :

- écoulement plan sous un canal rectangulaire creusé en milieu poreux.
- écoulement plan sous un barrage muni d'un parafouille épais.
- écoulement plan à travers une digue en terre munie d'un tapis filtrant.

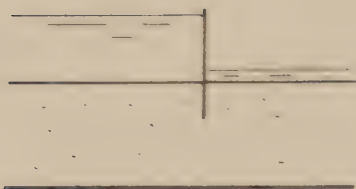


Fig. 1a

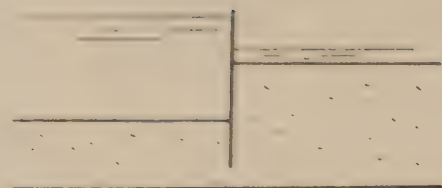


Fig. 1b



Fig. 1c

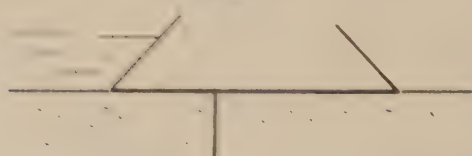


Fig. 1d

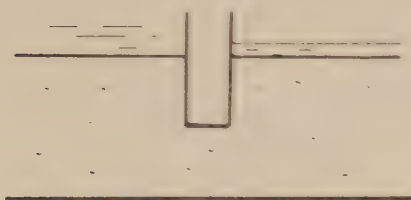


Fig. 1e

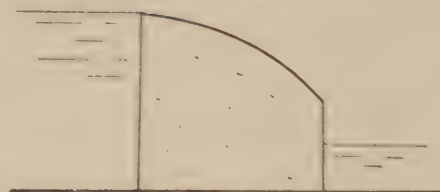


Fig. 1f

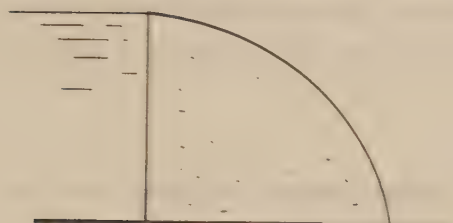


Fig. 1g

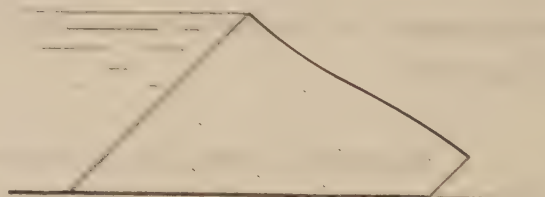


Fig. 1h

- (1) Thèse de M. Pierre GUEVEL "Contribution à l'étude théorique des écoulements d'infiltration" - Toulouse 1964.
- (2) C.R.A.S. Séance du 25 janvier 1967 Tome 264 n° 4. Note de MM. Claude THIRRIOT et Pierre GUEVEL.
- (3) HAMEL et POLOUBARINOVA-KOTCHINA "Théorie du mouvement des eaux souterraines".
- (4) Annales de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique - NANTES -
premier semestre 1967 - P. GUEVEL et A. VUEZ
premier semestre 1968 - P. GUEVEL et A. VUEZ
- (5) S. NUMEROV "Solution of Problem of Seepage without Surface of Seepage and without Evaporation of Infiltration of water from free Surface" (PMM G-1942)
C.R.A.S. Séance du 10 janvier 1966. Tome 262 Note de MM. Claude THIRRIOT et Jean EFTHIMIATOS.

CHAPITRE 2

-:-:-

DEBIT DE FUITE D'UN CANAL DE SECTION RECTANGULAIRE CREUSE DANS UN MILIEU PERMEABLE

Nous nous proposons de rechercher les caractéristiques de l'écoulement plan qui s'établit sous un canal de section rectangulaire, creusé dans un milieu poreux, de perméabilité A . Nous supposons que le terrain de perméabilité A repose sur une couche drainante horizontale.

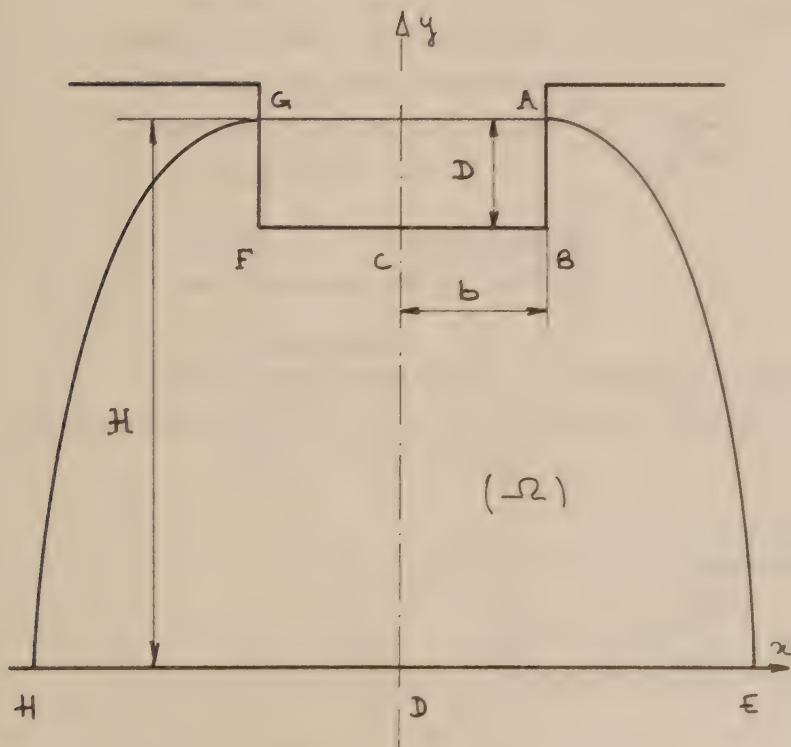


Fig. 1

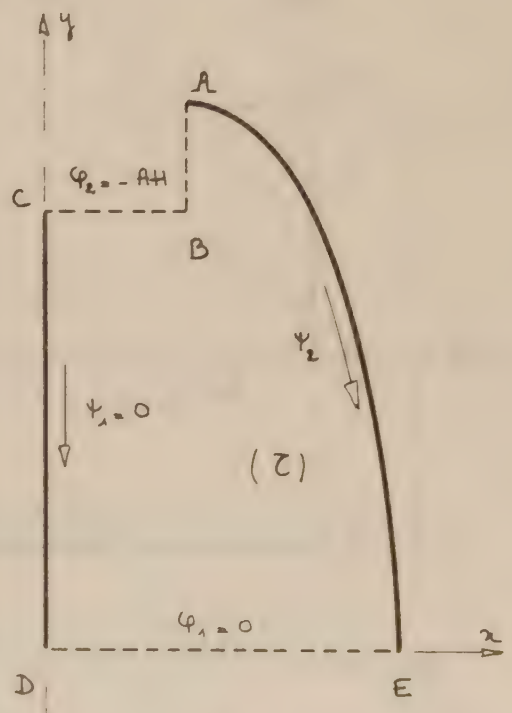


Fig. 2

Le domaine d'infiltration (Ω), représenté dans un plan de section droite du canal par la Fig. 1, est limité par le contour ABCFGHE. Du fait de la symétrie par rapport à l'axe Oy, nous ferons l'étude sur la moitié du domaine (Ω). Soit (τ) ce domaine d'étude.

Nous appellerons D la profondeur du canal, b sa demi largeur, et H la cote du plan d'eau, dans le canal, comptée à partir du plan de séparation du milieu perméable et de la couche drainante.

Les conditions aux limites de l'écoulement sont définies par : (Fig. 2)

- une ligne équipotentielle $\phi_2 = -AH$ sur les côtés AB et BC
- une ligne équipotentielle $\phi_1 = 0$ sur le côté DE
- une ligne de courant $\psi_2 = q$ sur la ligne AE
- une ligne de courant $\psi_1 = 0$ sur le côté CD

2,1 - ECOULEMENTS TRANSFORMES -

La transformation de l'hodographe définie par la relation :

$$(1) \quad W = \frac{dz}{d\xi}$$

applique le domaine (τ) sur un domaine (τ_1) représenté dans le plan W par une bande semi indéfinie (Fig. 3).

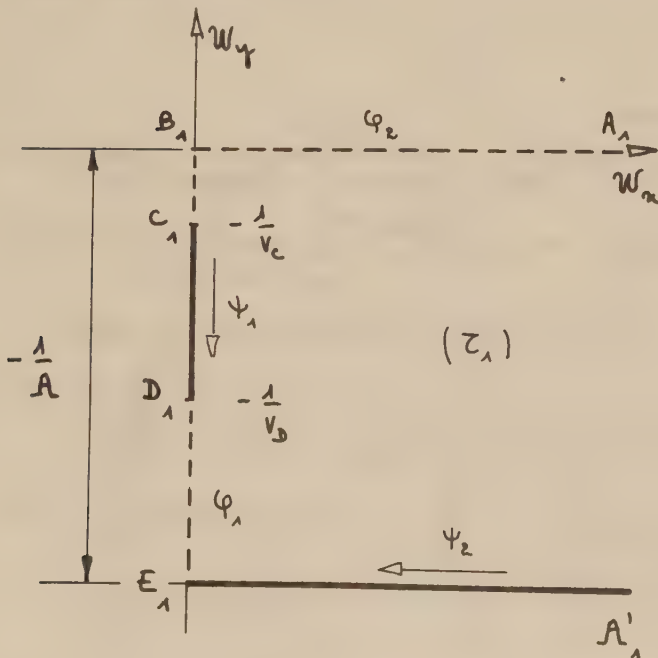


Fig. 3

Les points A, B et E ont pour homologues dans le plan W les points A_1 , B_1 et E_1 d'affixe ∞ , 0, $-\frac{1}{A}$. Les homologues C_1 et D_1 des points C et D, situés sur l'axe W_y ont pour affixes $-\frac{1}{V_C}$ et $-\frac{1}{V_D}$ telles que :

$$-\frac{1}{A} < -\frac{1}{V_D} < -\frac{1}{V_C}$$

Appliquons le domaine (τ_1) sur le domaine (τ_2) situé au-dessus de l'axe réel du plan T . Au point B_1 et E_1 , nous ferons correspondre les points B_2 et E_2 d'affixes -1 et $+1$ du plan T (Fig. 4). La transformation de SCHWARZ correspondante s'écrit alors :

$$(2) \quad \frac{dW}{dT} = \frac{1}{A\Pi} (T+1)^{-1/2} (T-1)^{-1/2}$$

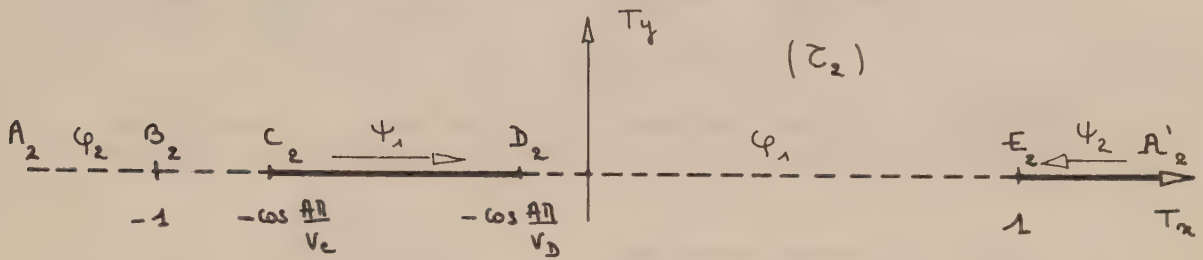


Fig. 4

Après intégration de l'équation différentielle (2), on obtient :

$$(3) \quad W = \frac{1}{A\Pi} \operatorname{Arg} \operatorname{ch} T - \frac{i}{A}$$

et après inversion :

$$(5) \quad T = \operatorname{ch} (A\Pi W + i) = -\operatorname{ch} (A\Pi W)$$

Les affixes des points C_2 et D_2 sont respectivement :

$$(6) \quad T_C = -\cos \frac{A\Pi}{V_C}$$

$$(7) \quad T_D = -\cos \frac{A\Pi}{V_D}$$

Enfin, nous appliquons le domaine (τ_2) sur le domaine (τ_3) du plan t , de telle manière que les points C_3 et D_3 aient pour affixe 0 et $+1$ (Fig. 5)

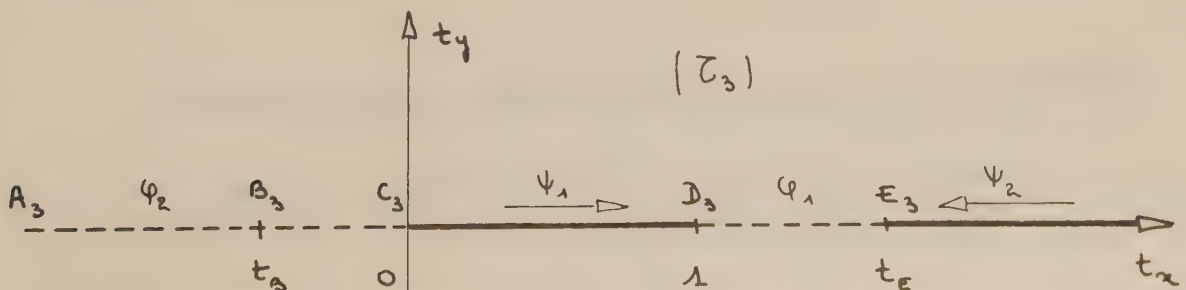


Fig. 5

La transformation correspondante est :

$$(8) \quad t = a T + b$$

$$\text{avec } a = \frac{1}{2} \frac{1}{\left\{ \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C} - \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_D} \right\}} \quad \text{et } b = \frac{\cos \frac{A\Pi}{V_C}}{2 \left\{ \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C} - \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_D} \right\}}$$

Le point E_3 , homologue du point E_2 (+1) du plan T, a pour affixe :

$$t_{E_3} = \frac{1}{2 \left\{ \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C} - \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_D} \right\}} + \frac{\cos \frac{A\Pi}{V_C}}{2 \left\{ \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C} - \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_D} \right\}}$$

$$(9) \quad t_{E_3} = \frac{1}{\cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C} - \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_D}}$$

Les conditions aux limites de l'écoulement dans le domaine (τ_3) sont identiques à celles de l'écoulement $\text{sn}^2(\xi; k)$ à condition de poser :

$$(10) \quad k = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C}}{\cos^2 \frac{A\Pi}{2V_D}}}$$

Le coefficient de débit est alors donné par l'expression :

$$(11) \quad Cq = \frac{K'(k)}{K(k)}$$

3,2 - EXPRESSION DE LA DISTANCE DU FOND DU CANAL A LA COUCHE DRAINANTE -

La loi de distribution de la fonction potentiel le long de la ligne de courant $C_3 D_3$ est donnée par les deux relations :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \cdot \frac{u}{K} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \end{array} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sn}(u;k) = \sqrt{t} \end{array} \right.$$

A une valeur de ϕ , il correspond dans le plan (τ_2) le point d'affixe :

$$(14) \quad T = 1 - 2 \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C} \cdot \text{dn}^2(u;k)$$

En outre, sur le segment C_1D_1 du plan W , la valeur de W s'écrit :

$$W = iW_y$$

et l'expression (5) prend la forme :

$$(15) \quad T = - \text{ch}(A\Pi iW_y) = - \cos A\Pi W_y$$

Par identification des relations (14) et (15), on en déduit que :

$$\cos^2 A\Pi \frac{W_y}{2} = \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C} \cdot \text{dn}^2(u;k)$$

et après inversion, que :

$$W_y = \frac{2}{A\Pi} \text{Arc cos} \left\{ \cos \frac{A\Pi}{2V_C} \cdot \text{dn}(u;k) \right\}$$

Les composantes d'un élément $d\vec{l}$ de la ligne équipotentielle ψ_1 sont :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = W_x d\phi \\ dy = W_y d\phi \end{array} \right.$$

L'intégration de la deuxième équation pour une variation de ϕ comprise entre ϕ_1 et ϕ_2 nous donne la cote du point C dans le plan z , soit :

$$y_C - y_D = \int_0^{AH} W_y d\phi$$

Le changement de variable $\frac{\phi}{AH} = \frac{u}{K}$ permet d'écrire :

$$(17) \quad \frac{y_C - y_D}{H} = \frac{2}{K' \Pi} \int_0^K \text{Arc cos} \left\{ \cos \frac{A\Pi}{2V_C} \cdot \text{dn}(u; k) \right\} du$$

2,3 - CALCUL DE LA LARGEUR DU CANAL -

La largeur du canal b s'exprime par la différence de la longueur DE avec la projection horizontale de la ligne AE. Le calcul se fait en deux parties :

$$1 - \text{Calcul de la longueur } L = \frac{x_E - x_D}{H}$$

La distribution de la fonction de courant sur le côté DE est donnée par les deux relations :

$$(18) \quad \psi = (\psi_2 - \psi_1) \frac{u}{K'} + \psi_1$$

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dn}(u; k') = \frac{1}{\sqrt{t}} \end{array} \right.$$

Les affixes des points homologues dans les plans (T) et (W) sont respectivement :

$$T = 1 - 2 \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C} \left\{ k'^2 \frac{\text{cn}^2(u; k')}{\text{dn}^2(u; k')} \right\}$$

et

$$W = \frac{2}{A\Pi} \text{Arc cos} \left\{ \cos \frac{A\Pi}{2V_C} k' \frac{\text{cn}(u; k')}{\text{dn}(u; k')} \right\}$$

Un élément $d\vec{l}$ de la ligne DE a pour projections sur les axes :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = -W_y d\psi \\ dy = W_y d\psi \end{array} \right.$$

Après intégration de la première équation, pour ψ variant de ψ_1 à ψ_2 , il vient :

$$x_E - x_D = \int_0^q W_y d\psi$$

Soit après le changement de variable $\frac{\psi}{q} = \frac{u}{K'}$

$$(20) \quad \frac{x_E - x_D}{H} = \frac{2}{\Pi} \frac{Cq}{K'} \int_0^{K'} \arccos \left\{ \cos \frac{A\Pi}{2V_C} \cdot k' \cdot \frac{\text{cn}(u; k')}{\text{dn}(u; k')} \right\} du$$

$$2 - \text{Expression de la longueur } \ell = \frac{x_E - x_A}{H}$$

La loi de distribution de la fonction de potentiel sur le côté AE s'écrit :

$$(21) \quad \phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \frac{u}{K} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

avec

$$(22) \quad \text{sn}(u; k) = \frac{1}{k \sqrt{t}}$$

Les affixes de l'homologue du point t dans les plans (T) et (W) sont :

$$T = 1 + 2 \cos^2 \frac{A\Pi}{2V_C} \cdot \frac{\text{cn}^2(u; k)}{\text{sn}^2(u; k)}$$

et

$$W_x = \text{Arg ch} \left\{ \cos \frac{A\Pi}{2V_C} \frac{\text{cn}(u; k)}{\text{sn}(u; k)} \right\}$$

La longueur $x_E - x_A$ est alors obtenue en intégrant la première équation du système (10) pour ϕ variant de ϕ_1 à ϕ_2 , soit après le changement de variable

$$\frac{\phi}{AH} = \frac{u}{K}$$

$$(23) \quad \ell = \frac{2}{\Pi K} \int_0^K \text{Arg ch} \left\{ \cos \frac{A\Pi}{2V_C} \cdot \frac{\text{cn}(u; k)}{\text{sn}(u; k)} \right\} du$$

3 - Calcul de la largeur 2b du canal

La largeur du canal est obtenue par la différence :

$$(24) \quad 2b = 2 (L - \ell)$$

2,4 - RESULTATS -

Le calcul des intégrales (17), (20), (23) sur ordinateur IBM 1130, a permis de tracer l'abaque de la Fig. 6 sur lequel figure la distance $\frac{y_C - y_D}{H}$ en fonction de la largeur du canal pour un coefficient C_q donné.

On peut remarquer que la profondeur D du canal est donnée directement par différence à 1 de la grandeur $\frac{y_C - y_D}{H}$.

Dimensions d'un canal rectangulaire creusé en milieu perméable.

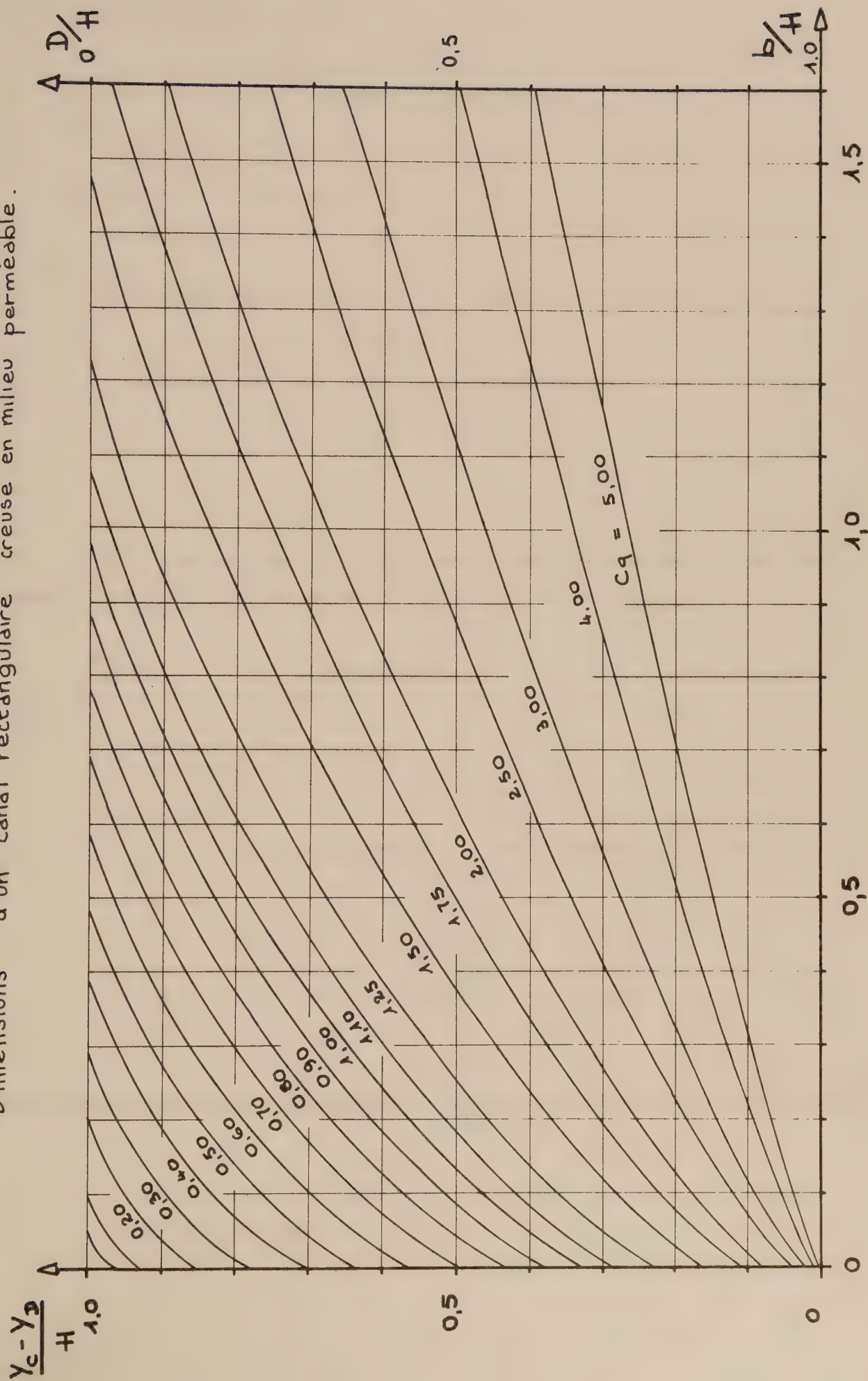


fig : 6

CHAPITRE 3

--:--:--

ÉCOULEMENT PLAN D'INFILTRATION SOUS UN BARRAGE ÉTANCHE MUNI D'UN MUR PARAFOUILLE

Un barrage étanche, muni d'un parafouille épais, repose sur une bande perméable indéfinie, limitée par un substratum horizontal. Fig. 1.

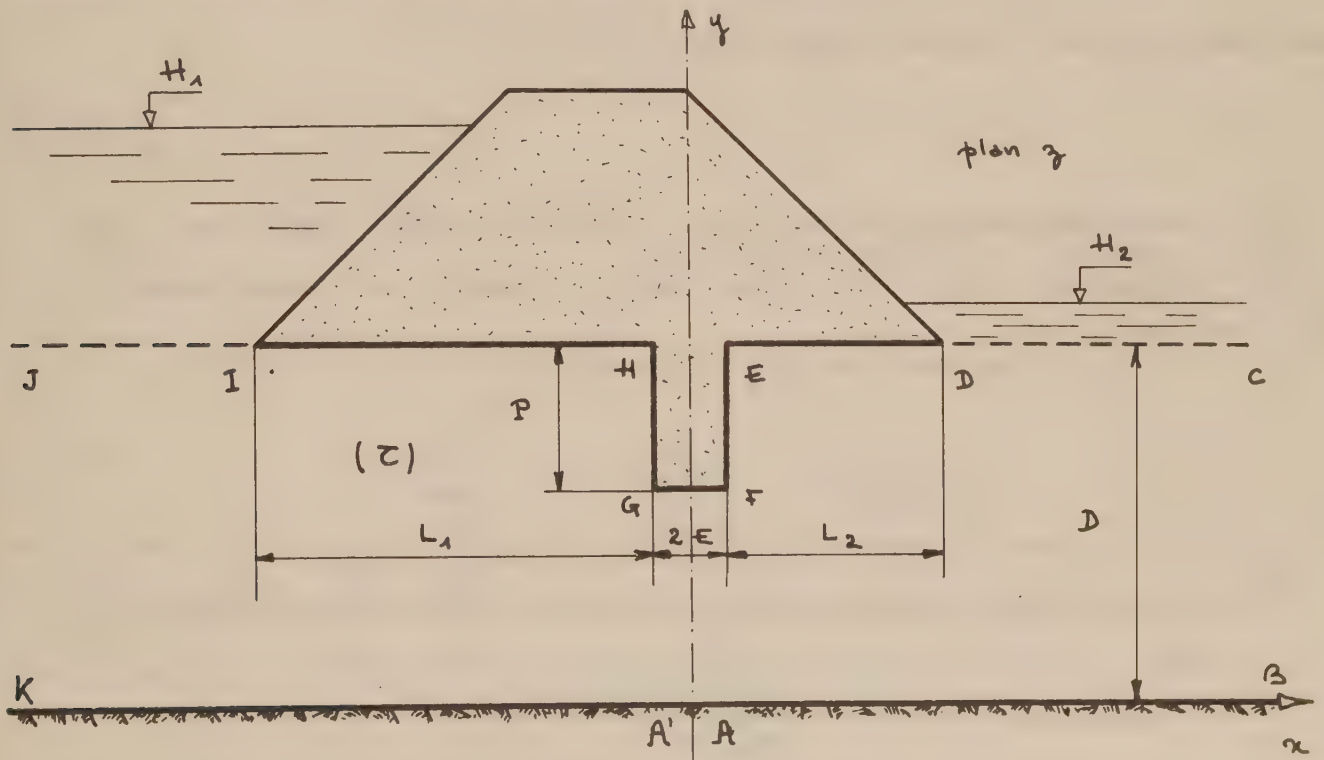


Fig. 1

Nous désignerons par :

- H_1 et H_2 les charges hydrauliques en amont et en aval de l'ouvrage,
- D l'épaisseur de la couche de terrain perméable,
- E la demi épaisseur du mur parafouille,
- P la profondeur du mur parafouille,
- L_1 et L_2 les longueurs mesurant l'assise du barrage, comptées à partir du mur parafouille.

Nous noterons par e , p , ℓ_1 et ℓ_2 les grandeurs réduites égales à :

$$\frac{E}{D} ; \frac{P}{D} ; \frac{L_1}{D} ; \frac{L_2}{D} .$$

Nous étudierons d'abord la transformation conforme qui applique le domaine (τ) du plan (z) sur le domaine (τ_1) défini par le demi plan T (Fig. 2). Celle-ci est donnée par la transformation de SCHWARZ.

$$(1) \quad \frac{dz}{dT} = M \left(T + \frac{1}{k\mu}\right)^{-1} \left(T + \frac{1}{k}\right)^{-1/2} (T + 1)^{1/2} (T - 1)^{1/2} \left(T - \frac{1}{k}\right)^{-1/2} \left(T - \frac{1}{k\mu}\right)^{-1}$$

dans laquelle k et μ sont des paramètres réels tels que :

$$k\mu < k < 1$$

Les homologues des points B, E et F ont respectivement pour affixe $-\frac{1}{k\mu}$; $-\frac{1}{k}$; -1 et par suite de la symétrie par rapport à l'axe Oy , celles des points J ; H ; G sont $\frac{1}{k\mu}$; $\frac{1}{k}$ et 1 .

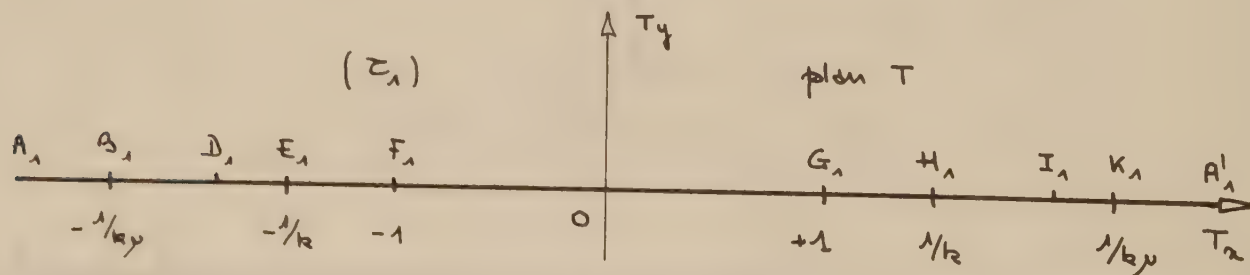


Fig. 2

La constante M de la transformation est déterminée en explicitant l'épaisseur D de la couche de terrain perméable ; on a en effet la relation :

$$(2) \quad D = \pi M \prod_{j \neq i} (T_i - T_j)^{-\alpha_j/\pi}$$

qui s'écrit pour $T_i = \frac{1}{k\mu}$:

$$D = \pi M \frac{k\mu}{2} \left(\frac{1 - k^2\mu^2}{1 - \mu^2} \right)^{1/2}$$

d'où l'on tire :

$$(3) \quad M = \frac{2D}{\pi} \frac{1}{k\mu} \left\{ \frac{1 - \mu^2}{1 - k^2\mu^2} \right\}^{1/2}$$

L'expression de la transformation de SCHWARZ prend la forme suivante :

$$(4) \quad dz = \frac{2}{\pi} D \frac{1}{k\mu} \left\{ \frac{1 - \mu^2}{1 - k^2\mu^2} \right\}^{1/2} \frac{(T^2 - 1)^{1/2}}{\left(T^2 - \frac{1}{k^2\mu^2}\right) \left(T^2 - \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}} dT$$

ou bien :

$$(5) \quad dz = M \cdot k \left\{ (1 - k^2\mu^2) \frac{1}{(1 - k^2\mu^2 T^2) [(1 - T^2)(1 - k^2 T^2)]} - \frac{1}{[(1 - T^2)(1 - k^2 T^2)]^{1/2}} \right\} dT$$

Le domaine (τ_1) peut être appliqué par la transformation

$$(6) \quad T = \operatorname{sn}(u; k)$$

sur le domaine (τ'_1) représenté par l'intérieur d'un rectangle de sommets G'_1 ; H'_1 ; E'_1 ; F'_1 d'affixes K ; $K + iK'$; $-K + iK'$; $-K$ dans le plan u (Fig. 3).

Les points J'_1 et C'_1 homologues des points J et C ont pour affixes :

$$(7) \quad u_J = \operatorname{Arg} \operatorname{sn} \left(\frac{1}{k\mu}; k \right)$$

$$(8) \quad u_C = \operatorname{Arg} \operatorname{sn} \left(-\frac{1}{k\mu}; k \right)$$

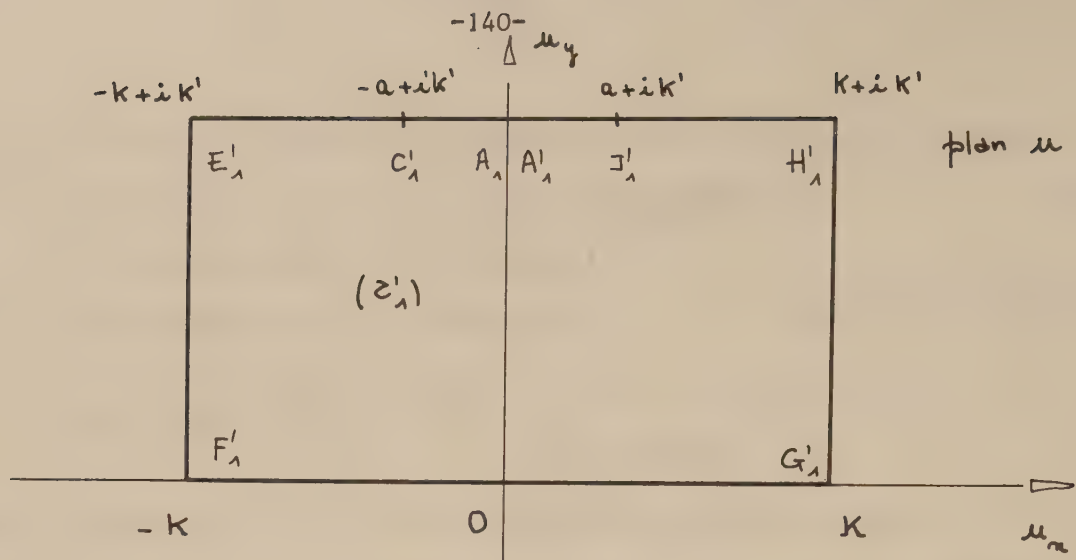


Fig. 3

L'équation (5) s'écrit :

$$(9) \quad dz = M.k \left\{ (1-k^2 \mu^2) \frac{1}{[1-k^2 \mu^2 \operatorname{sn}^2(u;k)]} - 1 \right\} du$$

Après intégration, on obtient :

$$(10) \quad z = M.k \left\{ (1-k^2 \mu^2) \Pi(u; -k^2 \mu^2; k) - u \right\} + C^{te}$$

Posons :

$$(11) \quad \mu = \operatorname{sn}(a;k) \quad 0 < a < K$$

En remplaçant μ par son expression dans l'équation (8), on a :

$$(12) \quad z = \frac{2D}{\pi} \frac{\operatorname{cn}(a;k)}{\operatorname{sn}(a;k) \operatorname{dn}(a;k)} \left\{ \operatorname{dn}^2(a;k) \Pi(u; -k^2 \operatorname{sn}^2(a;k); k) - u \right\} + C^{te}$$

ou bien :

$$(13) \quad \frac{z}{D} = \frac{2}{\pi} \left\{ \Pi^*(u; a; k) - k^2 \frac{\operatorname{sn}(a;k) \operatorname{cn}(a;k)}{\operatorname{dn}(a;k)} \right\} + C^{te}$$

soit en explicitant l'intégrale $\Pi^*(u; a; k)$ (relation 85 Chapitre 4)

$$\frac{z}{D} = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\theta_4(v-\beta)}{\theta_4(v+\beta)} + u Z(a;k) \right] - k^2 \frac{\operatorname{sn}(a;k) \operatorname{cn}(a;k)}{\operatorname{dn}(a;k)} \cdot u \right\} + C^{te}$$

avec $v = \frac{u}{2K}$ et $\beta = \frac{a}{2K}$

Après simplification, on obtient finalement :

$$(14) \quad \frac{z}{D} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\theta_4(v-\beta)}{\theta_4(v+\beta)} - Z(K-a;k) \cdot u \right\} + C^{te}$$

3,1 - EXPRESSION DE L'ÉPAISSEUR DU MUR PARAFUILLE -

La demi-épaisseur du mur parafouille est donnée par la longueur du côté OG du domaine (τ) . Au côté OG correspond le segment (OG'_1) du domaine (τ'_1) . La longueur E est donc obtenue en prenant l'intégrale z entre les limites $u = 0$ et $u = K$. Le résultat est :

$$(15) \quad e = \frac{E}{D} = \frac{2}{\pi} Z(K-a;k) \cdot K$$

avec

$$(16) \quad a = \operatorname{Arg} \operatorname{sn}(\mu;k)$$

3,2 - EXPRESSION DE LA PROFONDEUR DU MUR PARAFUILLE -

La profondeur du mur parafouille est donnée par le côté GH du domaine (τ) . Le côté correspondant du domaine (τ'_1) est $G'_1 H'_1$, et l'intégrale z est prise entre les bornes K et $K + iK'$. On a :

$$ip = i \frac{P}{D} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\theta_4(1/2+\tau/2-\beta)}{\theta_4(1/2+\tau/2+\beta)} \cdot \frac{\theta_4(1/2+\beta)}{\theta_4(1/2-\beta)} - iK' \cdot Z(K-a;k) \right\}$$

et après simplification :

$$(17) \quad p = \frac{a}{K} - \frac{2}{\pi} Z(K-a;k) \cdot K'$$

L'enfoncement relatif p s'exprime simplement en fonction de la demi-épaisseur relative e par la relation :

$$(18) \quad p = \frac{a}{K} - \frac{K'}{K} \cdot e$$

3,3 - EXPRESSIONS DES LONGUEURS L_1 ET L_2 -

1 - Calcul de la longueur L_1

La longueur L_1 est mesurée sur la demi-droite HJ du plan z. Il lui correspond dans le plan u, un segment de droite $H'_1 J'_1$.

Les extrémités H'_1 et J'_1 ont pour affixes :

$$(19) \quad u_{H'_1} = \text{Arg sn} \left\{ \frac{1}{k}; k \right\} = K + iK'$$

$$(20) \quad u_{J'_1} = \text{Arg sn} \left\{ \frac{1}{k \text{sn}(a; k)}; k \right\} = a + iK'$$

A un point courant I de la demi-droite HJ correspond un point I'_1 du plan u dont l'affixe est prise dans l'intervalle $]K + iK'; a + iK'[$. Soit $u_{I'_1}$ cette affixe, nous pouvons écrire :

$$u_{I'_1} = v + iK' \quad \text{avec } a < v < K$$

La longueur L_1 est alors donnée par l'intégrale z/D prise entre les limites $K + iK'$ et $v + iK'$ et changée de signe, soit, en posant $\alpha = \frac{v}{2K}$

$$(21) \quad \frac{L_1}{D} = -\frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\theta_4(\alpha + \tau/2 - \beta)}{\theta_4(\alpha + \tau/2 + \beta)} \cdot \frac{\theta_4(1/2 + \tau/2 + \beta)}{\theta_4(1/2 + \tau/2 - \beta)} - Z(K-a; k) [v-K] \right\}$$

ou

$$(22) \quad L_1 = +\frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\theta_1(\alpha + \beta)}{\theta_1(\alpha - \beta)} - Z(K-a; k) [K-v] \right\}$$

avec

$$v = \text{Arg sn} \left(\frac{1}{kT_I}; k \right)$$

2 - Calcul de la longueur L_2

Un raisonnement analogue, appliqué à un point courant D du segment CE conduit aux résultats suivants :

$$(23) \quad \frac{L_2}{H} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\theta_4(-\gamma+\tau/2-\beta)}{\theta_4(-\gamma+\tau/2+\beta)} \cdot \frac{\theta_4(-1/2+\tau/2+\beta)}{\theta_4(-1/2+\tau/2-\beta)} - Z(K-a;k) \left[-\eta+K \right] \right\}$$

ou bien

$$(24) \quad \frac{L_2}{H} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\theta_1(+\gamma-\beta)}{\theta_1(+\gamma+\beta)} - Z(K-a;k) \left[K+\eta \right] \right\}$$

avec

$$(25) \quad \eta = \operatorname{Arg} \operatorname{sn} \left(\frac{1}{kT_D} ; k \right) \quad \text{avec} \quad -K < -\eta < -a$$

et

$$(26) \quad \gamma = \frac{\eta}{2K}$$

3,4 - COEFFICIENT DE DEBIT DE L'ECOULEMENT D'INFILTRATION SOUS UNE DIGUE ETANCHE MUNIE D'UN MUR PARAFOUILLE -

Les conditions aux limites de l'écoulement sous une digue imperméable, munie d'un mur parafouille épais, sont successivement : (Fig. 4)

- une ligne équipotentielle $\phi_1 = -AH_1$ sur la demi-droite IJ,
- une ligne équipotentielle $\phi_2 = -AH_2$ sur la demi-droite DC,
- une ligne de courant ψ_1 sur la droite KA'AB
- une ligne de courant ψ_2 sur les côtés IHGFED.

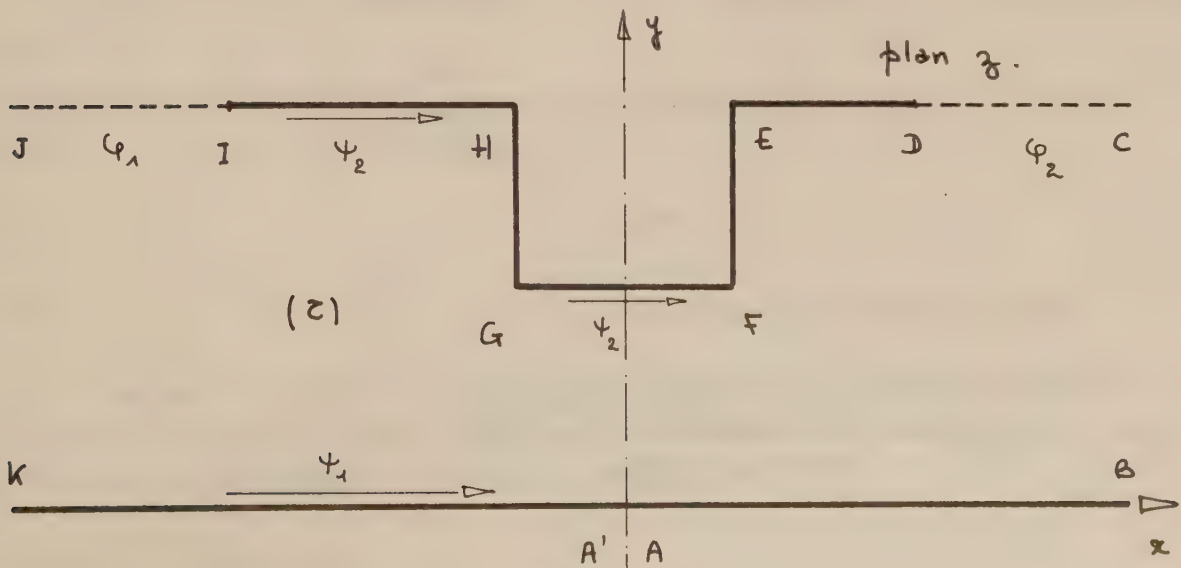


Fig. 4

plan T.

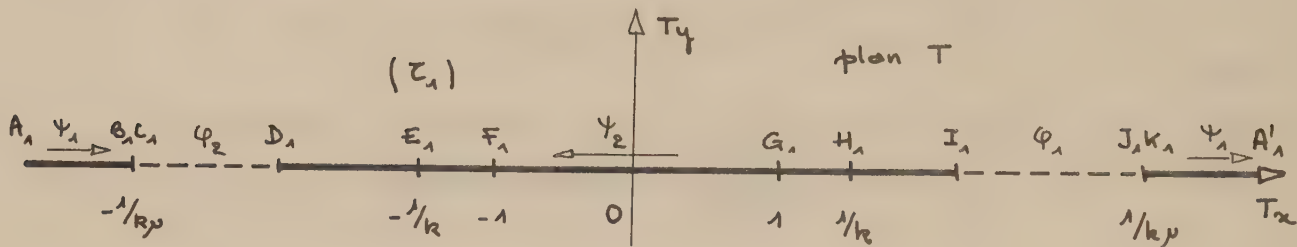


Fig. 5

formation :

$$(27) \quad t = \frac{\alpha}{1+k\mu T} + \beta$$

avec

$$(28) \quad \alpha = \frac{(1+k\mu T_I)(1+k\mu T_D)}{k\mu(T_D - T_I)}$$

et

$$(29) \quad \beta = \frac{1 + k_{\mu} T_I}{k_{\mu} (T_I - T_D)}$$

d'affixes 0 et +1 dans le plan t . Fig. 6.

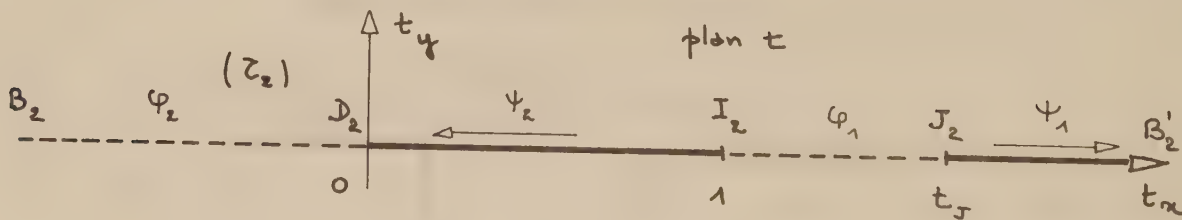


Fig. 6

L'affixe du point J_2 homologue de J_1 est :

$$t_J = \frac{-1 + k\mu (T_D - T_I) + k^2 \mu^2 T_D T_I}{2k\mu (T_D - T_I)}$$

Les conditions aux limites de l'écoulement dans le plan t sont identiques à celles de l'écoulement $z = \text{sn}^2 \left(\frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{0}} ; k \right)$ de la planche II_a. On en déduit que le coefficient de débit C_q s'exprime par :

$$(30) \quad C_q = \frac{K'(\sin \theta)}{K(\sin \theta)}$$

avec

$$(31) \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{2k\mu (T_I - T_D)}{1 + k\mu (T_I - T_D) - k^2 \mu^2 T_D T_I}}$$

Cas particulier d'un barrage avec un mur parafouille placé au milieu de l'assise du barrage.

Les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 dans ce cas sont égales. Les points I et D sont donc symétriques par rapport à l'axe du mur parafouille, leurs homologues I_1 et D_1 du plan T ont des affixes opposées. Le coefficient de débit C_q est égal à :

$$(32) \quad C_q = \frac{K'(\sin \theta)}{K(\sin \theta)}$$

avec

$$(33) \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{4k\mu T_I}{(1 - k\mu T_I)^2}}$$

Appliquons la transformation de LANDEN aux intégrales elliptiques K et K' , il vient :

$$(34) \quad C_q = \frac{K'(\sin \theta)}{2K \sin(\theta)}$$

avec

$$(35) \quad \sin \theta = k\mu T_I$$

Lorsque l'ouvrage à étudier se réduit seulement à un mur parafouille, enfoncé dans une bande de terrain perméable, les formules (34) et (35) restent applicables à condition de prendre $T_I = \frac{1}{k}$, c'est-à-dire :

$$(36) \quad \sin \theta = \mu$$

3,5 - RESULTATS -

Devant la multiplicité des cas d'écoulement qui correspondent à une valeur du coefficient C_q , il ne nous est pas possible de donner un abaque de résultats analogue à celui de la Fig. 6 du problème de l'écoulement sous un canal rectangulaire.

Nous nous sommes donc bornés à résoudre complètement quelques problèmes particuliers, mais nous fournissons l'ordinogramme que nous avons utilisé, et qui peut être adopté pour résoudre n'importe quel cas (Planche I).

Le calcul se conduit de la manière suivante :

1er temps : Nous avons calculé l'épaisseur et la profondeur du mur parafouille en fonction des deux paramètres k et μ caractéristiques de la transformation de SCHWARZ de la formule (1). Pour des raisons propres au calcul numérique des fonctions Z et θ , il est préférable d'exprimer e et p en fonction des paramètres q et $\sin \frac{a}{K}$. Le réseau de courbes de la Fig. 7 résume les résultats.

Remarquons que ce calcul ne fait intervenir aucune notion d'écoulement de filtration ; il peut donc être utilisé dans n'importe quel problème où intervient la transformation de SCHWARZ sous la forme (1).

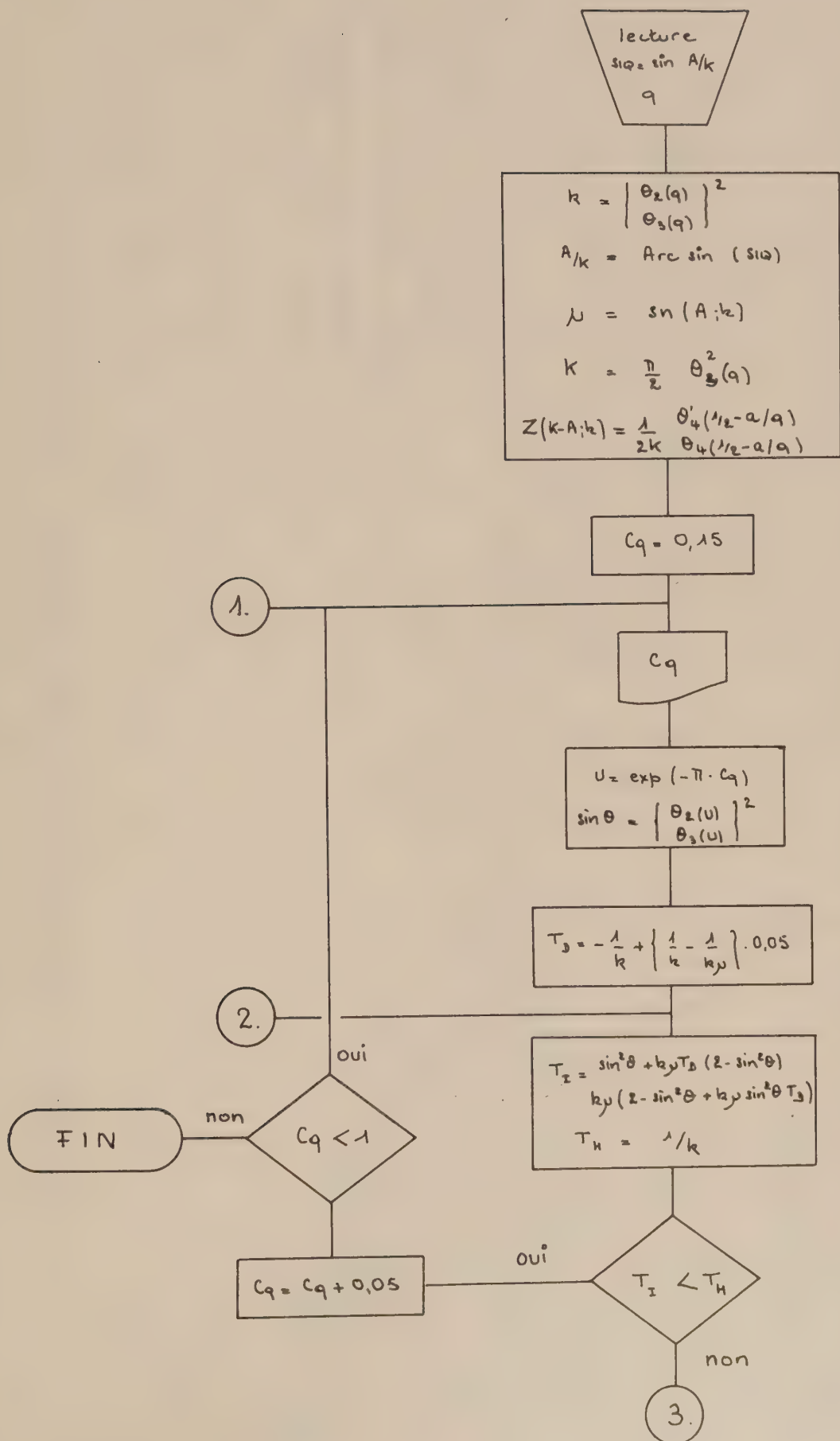
2ème temps : Une fois déterminés les paramètres q et $\sin \frac{a}{K}$ en fonction des dimensions du mur parafouille, nous déterminons, pour un C_q donné, les couples de valeurs ℓ_1 et ℓ_2 correspondant à des valeurs de T_D choisies dans un intervalle convenable.

Nous avons tracé les abaques donnant la longueur ℓ_1 en fonction de la longueur ℓ_2 pour un coefficient de débit C_q donné, pour les dimensions du parafouille suivantes :

:	:	:	:	:
:	e	:	p	:
:	:	:	q	:
:	:	:	:	$\sin \frac{a}{K}$
:	:	:	:	:
:	0,10	:	0,30	:
:	:	:	0,0125	:
:	:	:	0,420	:
:	0,10	:	0,10	:
:	:	:	0,0295	:
:	:	:	0,180	:
:	0,05	:	0,10	:
:	:	:	0,0200	:
:	:	:	0,150	:
:	0,15	:	0,50	:
:	:	:	0,0180	:
:	:	:	0,660	:
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:

Par ailleurs, l'abaque de la Fig. 9 représente la variation de la profondeur du mur parafouille en fonction de l'épaisseur à C_q constant.

Planche I



3

$$\eta = \text{Arg} \operatorname{sn} \left\{ \frac{1}{k T_D} ; k \right\}$$

$$SP_\eta = \text{Log} \frac{\Theta_1(x+A)}{\Theta_1(x-B)}$$

$$l_2 = \{-SP_\eta - 2Z(k+\eta)\} / \pi$$

$$u = \text{Arg} \operatorname{sn} \left\{ \frac{1}{k T_2} ; k \right\}$$

$$SP_u = \text{Log} \frac{\Theta_1(\alpha-B)}{\Theta_1(\alpha+A)}$$

$$l_1 = \{SP_u + 2Z(k-u)\} / \pi$$

l_2
 l_1

l_2
 l_1

$$T_D = T_D + 0.05 \left(-\frac{1}{B_D} + \frac{1}{k} \right)$$

2 — oui — $T_D < -\frac{1}{kD}$

non

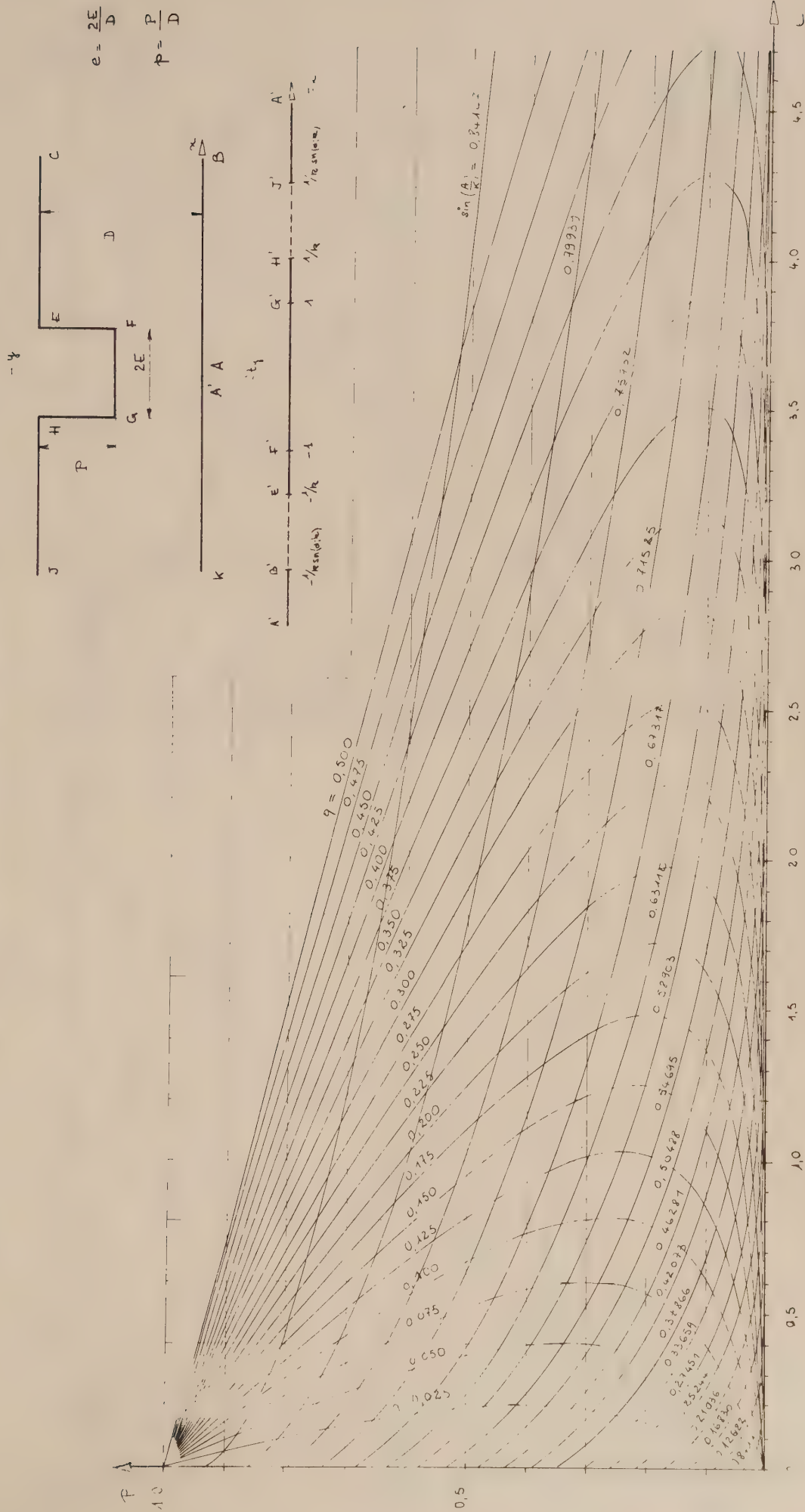
$$C_q = C_q + 0.05$$

1 — oui — $C_q < 1$

non

FIN

Paramètres de la transformation de SCHWARZ - CRISTOFFEL .



Dimensions d'un barrage étanche muni d'un mur parafouille.

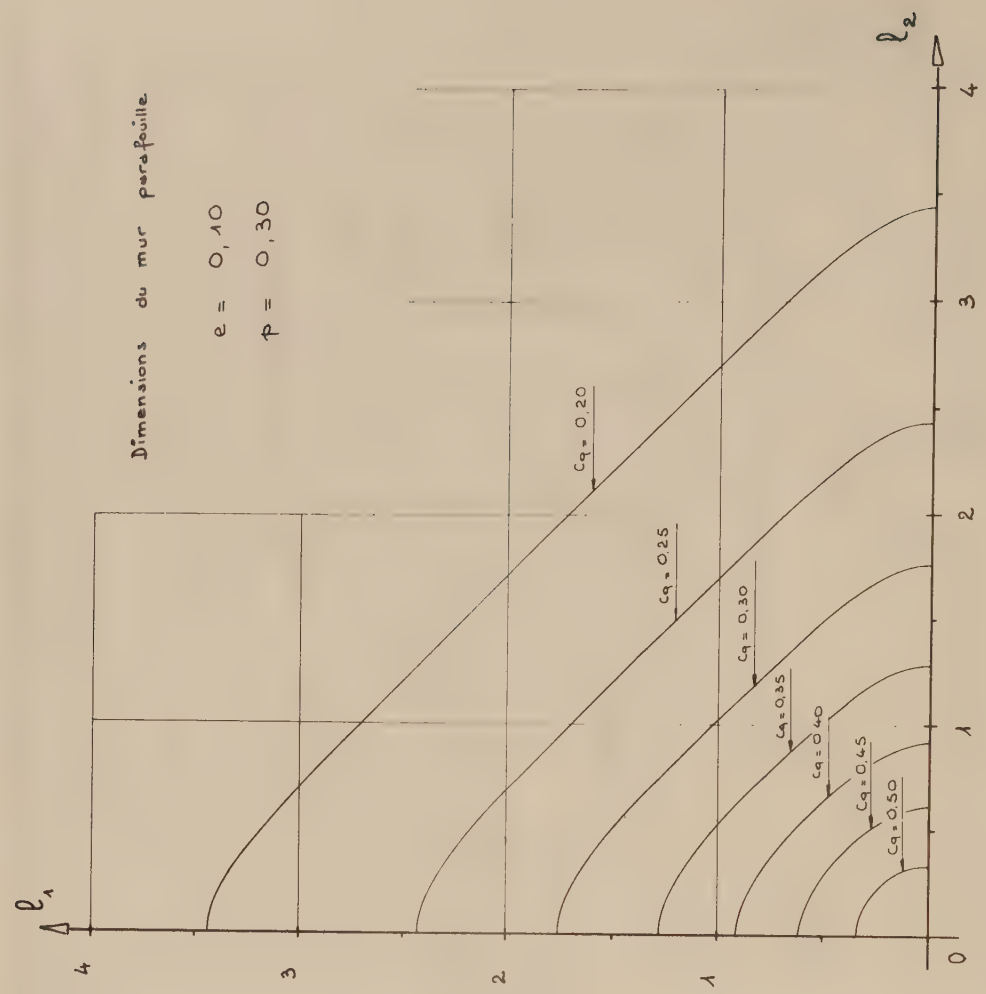
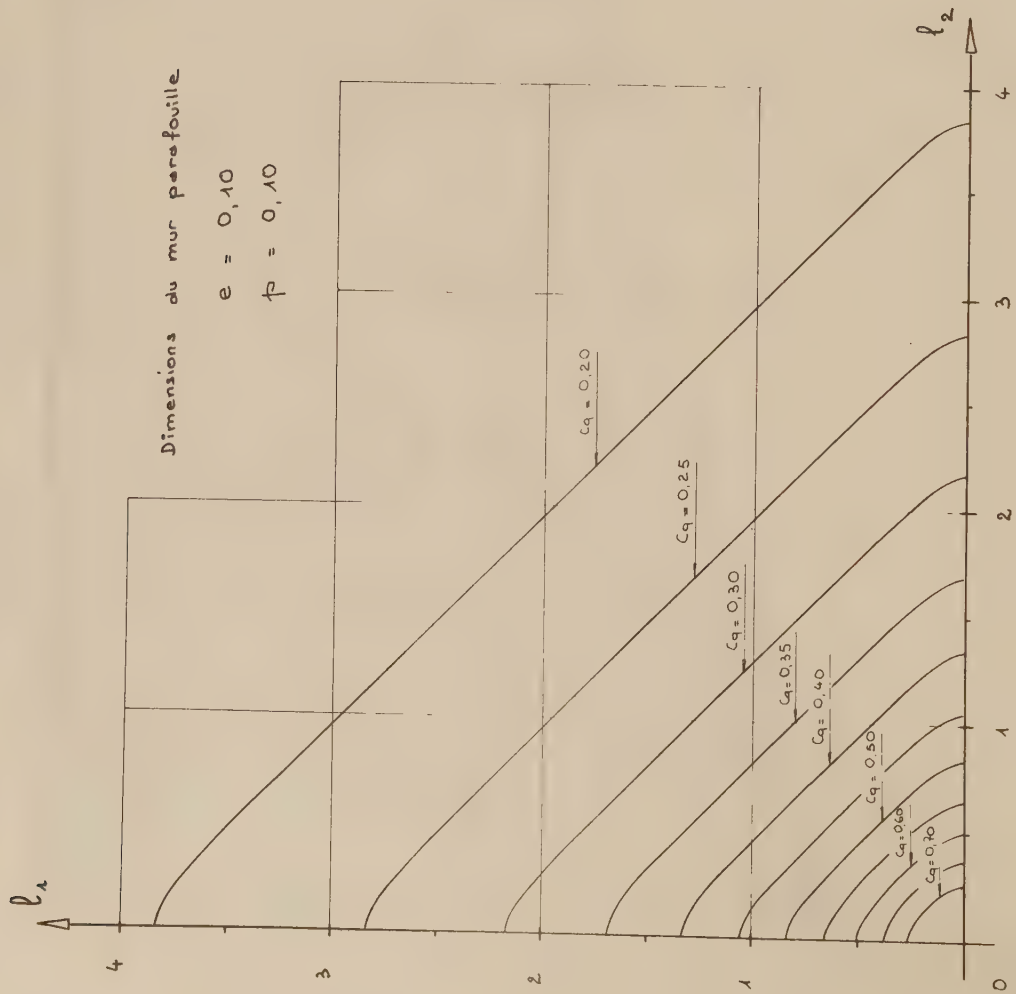
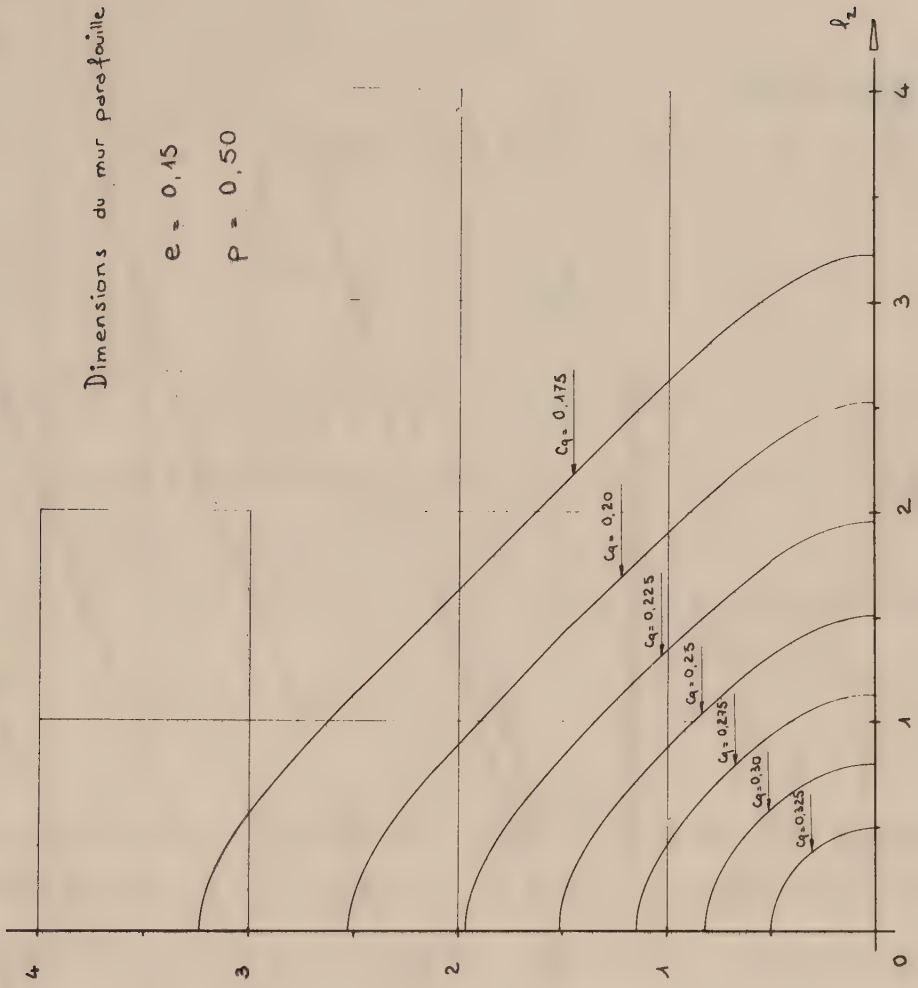
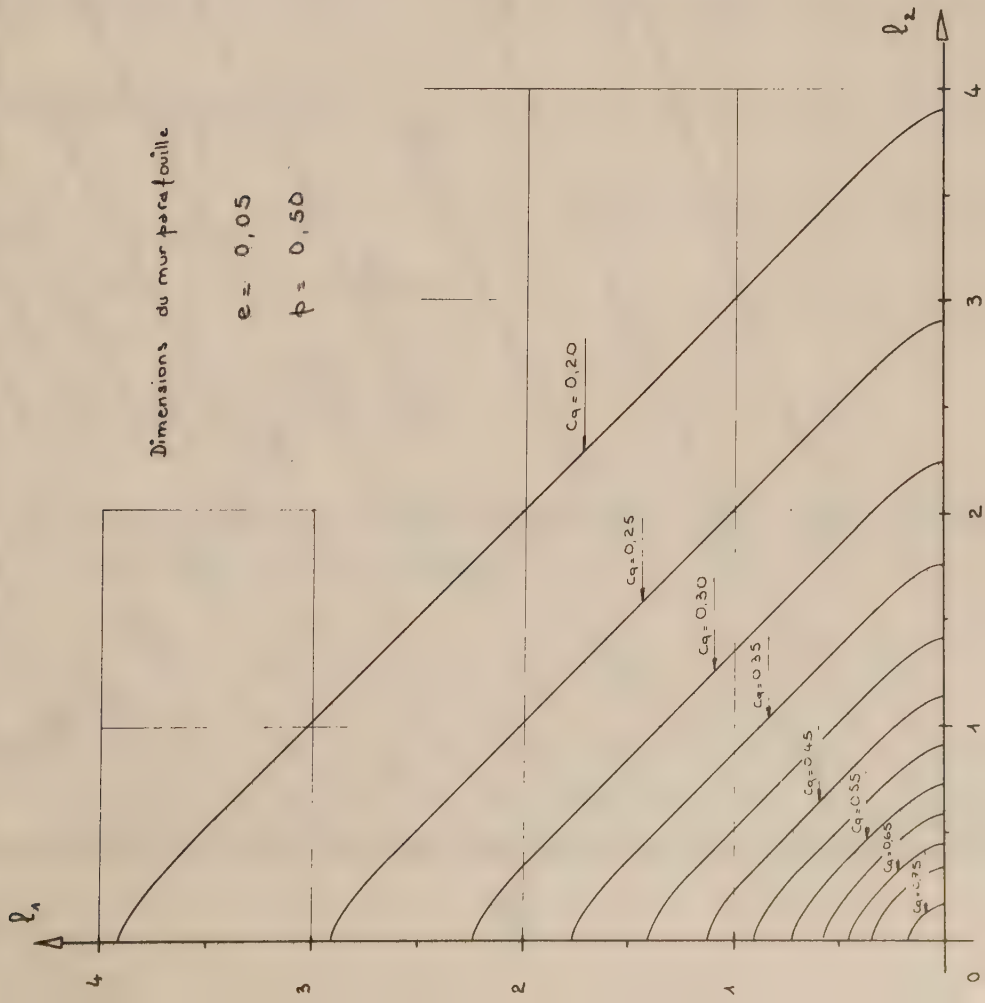


fig : 8 b

Dimensions d'un barrage étanche muni d'un mur parafoûille.



७
 ००
 ..
 ७
 ५-
 ५+

Écoulement sous un mur parafouille.

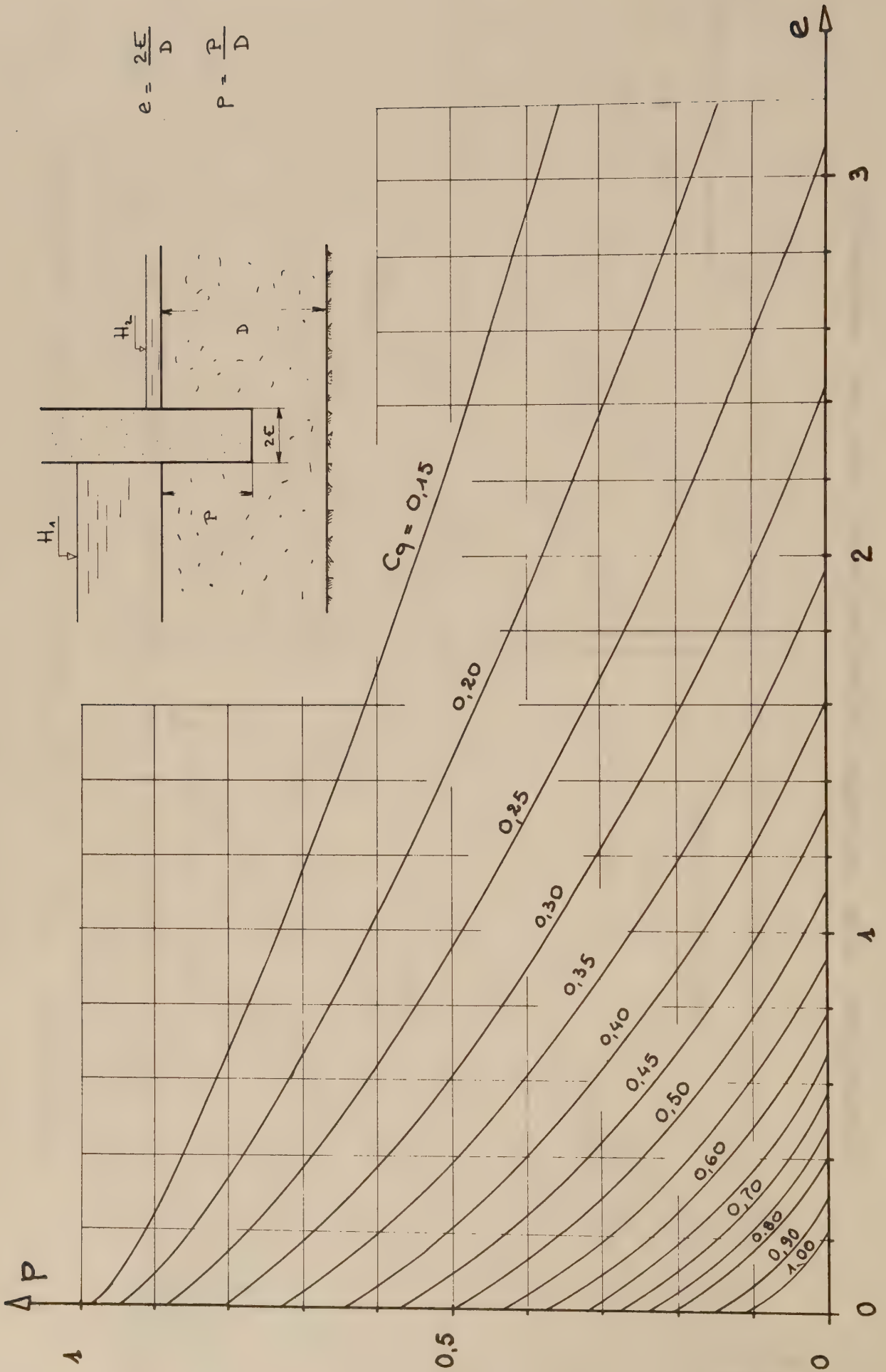


fig: 9

CHAPITRE 4

-:-:-

ÉCOULEMENT PLAN À TRAVERS UNE DIGUE EN TERRE MUNIE D'UN TAPIS FILTRANT

Nous admettons que la digue est constituée d'un matériau homogène, isotrope, de perméabilité A , et qu'elle repose sur une assise imperméable horizontale.

Les caractéristiques de l'écoulement, dans un des plans directeurs, sont représentées sur la Fig. 1.

Nous désignerons par :

- (τ) le domaine d'écoulement,
- β l'angle de talus du parement amont,
- H la charge amont,
- L la distance du tapis filtrant au pied du parement amont,
- ℓ la longueur utile du tapis filtrant.

Dans le plan $z = x + i y$, choisi comme plan de la figure, l'écoulement est défini par la fonction de potentiel complexe :

$$\xi = \phi + i \psi \quad (1)$$

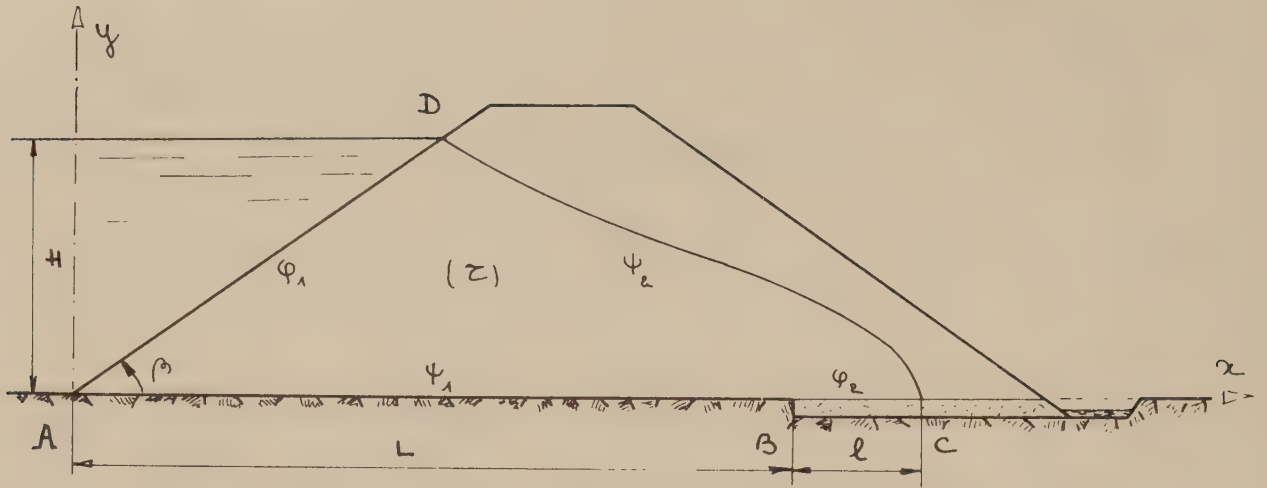


Fig. 1

Le domaine d'infiltration (τ) est limité par le contour ABCDA dont les éléments AB, BC, CD, DA sont respectivement :

- une ligne de courant $\psi_1 = 0$
- une ligne équipotentielle $\phi_2 = +AH$
- une ligne de courant $\psi_2 = q$
- une ligne équipotentielle $\phi_1 = 0$

Nous nous proposons d'une part, d'établir l'équation de la ligne d'eau DC, et, d'autre part, de déterminer le débit d'infiltration q par unité de largeur de la digue.

4,1 - RESOLUTION DU PROBLEME PAR LA METHODE DE L'HODOGRAPHE -

Dans le plan de l'hodographe :

$$W = \frac{dz}{d\xi} \quad (2)$$

l'écoulement présente différents aspects selon que la longueur L est supérieure, égale ou inférieure à un certain critère L_c , fonction de H et β :

- . Pour $L > L_c$, la ligne d'eau DC présente un point d'inflexion (Fig. 2a et 2b).
- . Pour $L = L_c$, le point d'inflexion I se confond avec le point D (Fig. 3a et 3b)
- . Pour $L < L_c$, la ligne DC ne présente plus de point d'inflexion ; par contre, il existe sur le parement AD, un point S pour lequel la vitesse passe par un maximum (Fig. 4a et 4b).

Le premier cas a été étudié par FALKOVICH ; les résultats théoriques qu'il a obtenus se présentent sous une forme très complexe et, à notre connaissance, ils n'ont pas fait l'objet d'une tabulation systématique.

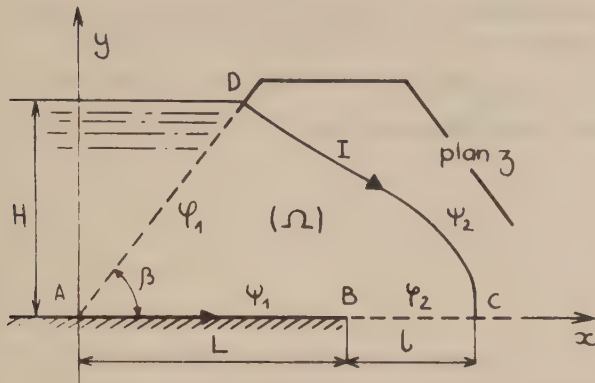


fig: 2.a

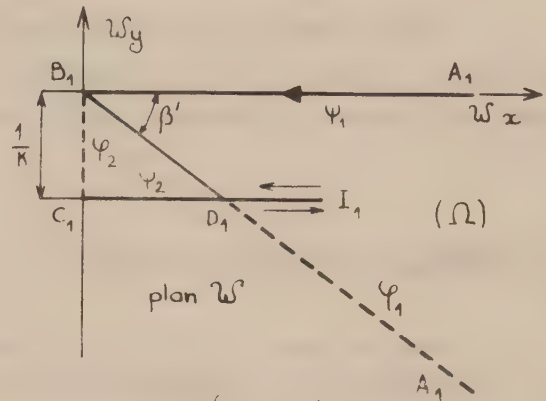


fig. 2-b

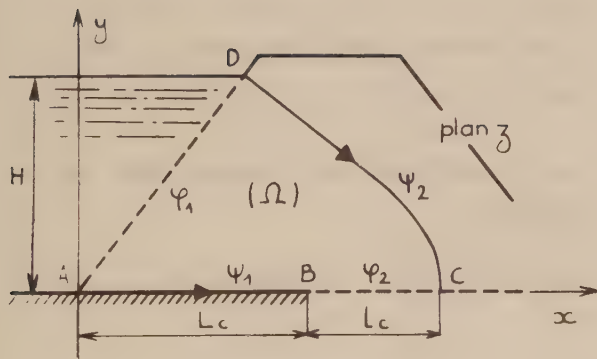


fig:3 .a

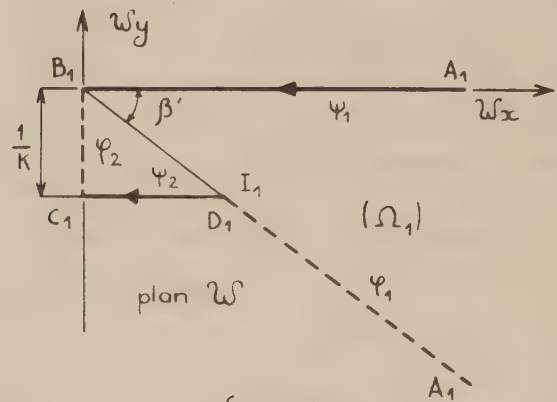


fig. 3.b

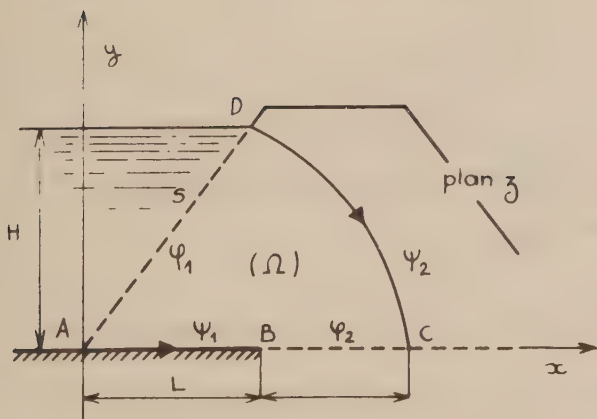


fig: 4 .a

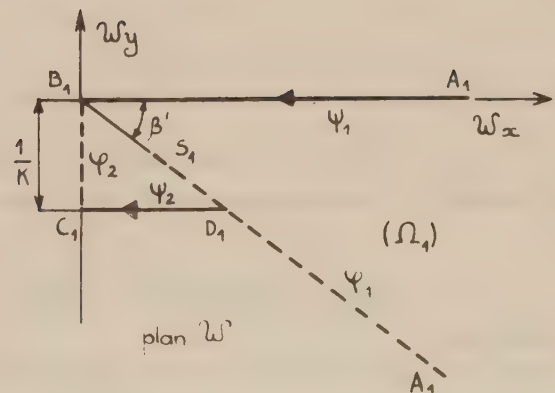


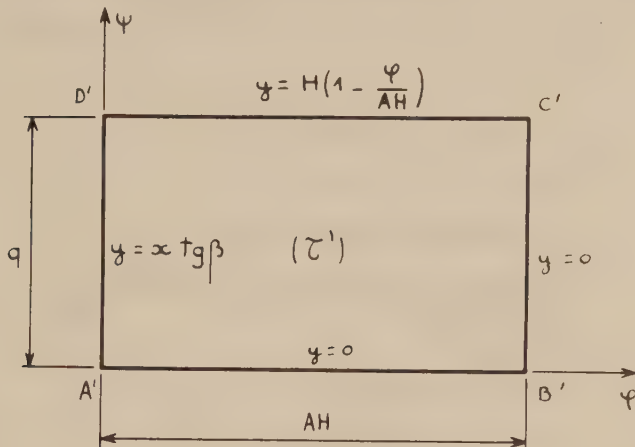
fig. 4-b

Le cas limite, pour lequel $L = L_c$ a déjà fait l'objet de publication⁽¹⁾.
Le troisième cas, qui ne présente d'ailleurs que peu d'intérêt au point de vue pratique, n'a pas retenu l'attention des spécialistes.

Etant donnée la difficulté que l'on éprouve pour exploiter les résultats fournis par la méthode de l'hodographe, nous avons été amenés à mettre au point une méthode, entièrement différente, ne présentant pas cet inconvénient.

4,2 - EXPOSE DE LA METHODE PROPOSEE -

Dans le plan $\xi = \phi + i \psi$, le domaine (τ) a pour homologue le domaine (τ') , limité par le contour rectangulaire $A' B' C' D'$ (Fig. 5).



Nous sommes ainsi ramenés au problème classique qui consiste à déterminer une fonction analytique à l'intérieur d'un rectangle lorsqu'on connaît les conditions aux frontières ; la fonction cherchée est $z = x + i y$, la variable étant $\xi = \phi + i \psi$.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

Fig. 5

- Sur $A' B'$: $y = 0$
- Sur $B' C'$: $y = 0$
- Sur $C' D'$: $y = H \left(1 - \frac{\phi}{AH} \right) = H \left(1 - C_q \cdot \frac{\phi}{q} \right)$
- Sur $D' A'$: $y = x.tg\beta$

Une difficulté apparaît du fait que sur $A' D'$, on obtient une relation dans laquelle interviennent les deux fonctions conjuguées x et y .

Une simplification est obtenue en superposant à la fonction inconnue z , la fonction :

(1) Thèse de Monsieur Pierre GUEVEL

$$z_1 = H \left\{ \frac{C_q}{2} \left(\frac{\xi}{q} \right)^2 - \frac{\xi}{q} \right\} \quad (3)$$

dont les parties réelles et imaginaires sont :

$$x_1 = H \left\{ \frac{C_q}{2} \cdot \frac{\phi^2 - \psi^2}{q^2} - \frac{\phi}{q} \right\}$$

$$y_1 = H \left\{ C_q \cdot \frac{\phi \cdot \psi}{q^2} - \frac{\psi}{q} \right\}$$

Les conditions aux limites relatives à la fonction z_2 , telle que :

$$z = z_2 + H \left\{ \frac{\xi}{q} - \frac{C_q}{2} \left(\frac{\xi}{q} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

sont les suivantes :

- Sur A' B' : $y_2 = 0$
- Sur B' C' : $y_2 = 0$
- Sur C' D' : $y_2 = 0$
- Sur D' A' : $\frac{y_2}{H} + \frac{\psi}{q} = \left\{ \frac{x_2}{H} + \frac{C_q}{2} \cdot \left(\frac{\psi}{q} \right)^2 \right\} \cdot \operatorname{tg} \beta$

La fonction z_2 s'exprime par la série :

$$z_2 = H \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{C_q}\right)} \cdot \operatorname{ch} \left[n \pi \left(\frac{\xi}{q} - \frac{1}{C_q} \right) \right] \quad (5)$$

dans laquelle les coefficients A_n seront déterminés de telle sorte que la condition sur le côté D' A' soit satisfaite :

$$\frac{y_2}{H} + \frac{\psi}{q} = \left[\frac{x_2}{H} + \frac{C_q}{2} \cdot \left(\frac{\psi}{q} \right)^2 \right] \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (6)$$

Avant de traiter le cas général, où l'angle β est quelconque, nous nous proposons de résoudre le problème simple de la digue à paroi verticale ($\beta = \frac{\pi}{2}$).

4,3 - DIGUE A PAROI VERTICALE -

La relation (6) dans ce cas, se réduit à :

$$\frac{x_0}{H} = - \frac{C_q}{2} \cdot \left(\frac{\eta}{q} \right)^2 \quad (6')$$

et la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients A_n est :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot \cos(n \pi \cdot \frac{\eta}{q}) = - \frac{C_q}{2} \cdot \left(\frac{\eta}{q} \right)^2 \quad (5')$$

En développant en série de Fourier - sur l'intervalle $[0, q]$ - le second membre de cette égalité, on obtient immédiatement par identification :

$$A_0 = - \frac{C_q}{6} \quad (7)$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2 C_q}{n^2 \pi^2} \quad (8)$$

D'où la solution cherchée est :

$$\frac{z}{H} = - \frac{C_q}{6} + \frac{\xi}{q} - \frac{C_q}{2} \left(\frac{\xi}{q} \right)^2 + \frac{2 C_q}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\text{ch} \left[n \pi \left(\frac{\xi}{q} - \frac{1}{C_q} \right) \right]}{n^2 \cdot \text{ch} \left(\frac{n \pi}{C_q} \right)} \quad (9)$$

On en déduit successivement :

. L'équation de la ligne d'eau CD :

$$\frac{x}{H} = \frac{C_q}{3} + \frac{1}{2 C_q} \left[1 - \left(\frac{y}{H} \right)^2 \right] - \frac{2 C_q}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\text{ch} \left(\frac{n \pi}{C_q} \cdot \frac{y}{H} \right)}{n^2 \cdot \text{ch} \left(\frac{n \pi}{C_q} \right)} \quad (10)$$

. L'abscisse réduite $\frac{L + \ell}{H}$ du point C :

$$\frac{L + \ell}{H} = \frac{C_q}{3} + \frac{1}{2 C_q} - \frac{2 C_q}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 \cdot \text{ch} \left(\frac{n \pi}{C_q} \right)} \quad (11)$$

. La longueur réduite $\frac{L}{H}$ de l'assise AB :

$$\frac{L}{H} = \frac{1}{2 C_q} - \frac{C_q}{6} + \frac{2 C_q}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{n \pi}{C_q}\right)} \quad (12)$$

. La longueur réduite $\frac{\ell}{H}$ de la partie utile du filtre :

$$\frac{\ell}{H} = \frac{C_q}{2} - \frac{4 C_q}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{(2n-1) \pi}{C_q}\right)} \quad (13)$$

Les valeurs du coefficient de débit, dans les cas pratiques, sont suffisamment faibles pour que les termes de la forme $\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{n \pi}{C_q}\right)}$ soient négligeables. On peut alors

admettre, avec une très bonne approximation, les formules suivantes :

$$\frac{L}{H} = \frac{1}{2 C_q} - \frac{C_q}{6} \quad (12')$$

$$\frac{\ell}{H} = \frac{C_q}{2} \quad (13')$$

valables seulement pour $C_q < 0,5$

Le réseau quadratique orthogonal des lignes de courant et des lignes équipotentielles, dessiné sur la Fig. 6 correspond au cas $C_q = 0,5$. Sur la Fig. 7, on a représenté les lignes d'eau correspondant à quelques valeurs remarquables de C_q .

4,4 - DIGUES A PAROI INCLINEE -

L'équation (6) qui permet de déterminer les coefficients A_n figurant sur l'expression de z_2 prend la forme suivante :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot \operatorname{th} \frac{n \pi}{C_q} \sin(n \pi \cdot \frac{\psi}{q}) + \operatorname{tg} \beta \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot \cos(n \pi \cdot \frac{\psi}{q}) = \frac{C_q \cdot \operatorname{tg} \beta}{2} \cdot \left(\frac{\psi}{q} \right)^2 - \frac{\psi}{q} \quad (14)$$

Elle doit être satisfaite, quel que soit ψ , sur l'intervalle 0, q, la borne zéro étant d'ailleurs exclue du fait que le point A' du plan ξ est un point singulier.

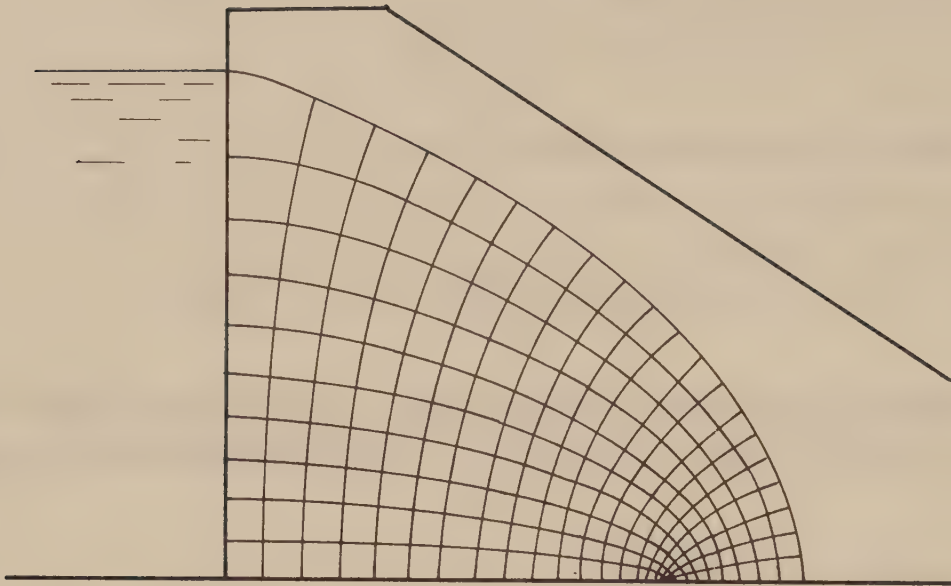


Fig. 6

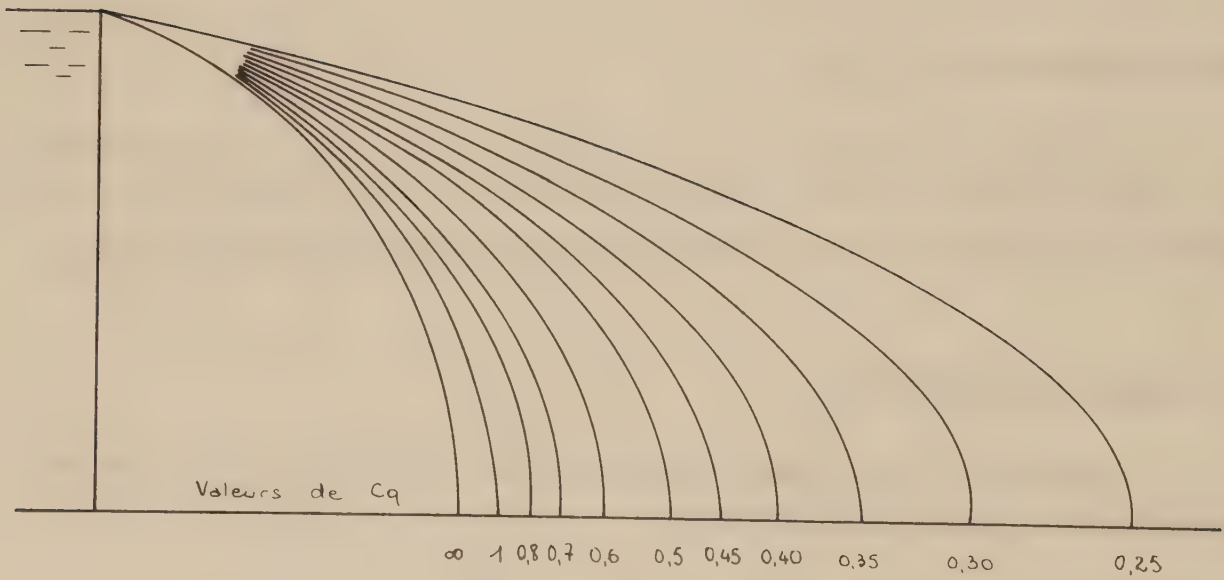


Fig. 7

Afin de simplifier l'écriture, nous poserons : $u = \pi \cdot \frac{\psi}{q}$; l'équation (14) s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \operatorname{th} \frac{n\pi}{C_q} \sinh nu + \operatorname{tg} \beta \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cosh nu = \frac{C_q \cdot \operatorname{tg} \beta}{2\pi^2} \cdot u^2 - \frac{u}{\pi} \quad (14')$$

pour $0 < u < \pi$

Le premier membre de cette égalité ne doit pas être considéré comme une série de Fourier classique. On remarque, en effet, que les coefficients des termes en sinus ne sont pas indépendants des termes en cosinus. Par ailleurs, cette série, de période 2π , n'est définie que sur l'intervalle $]0, \pi]$

Nous n'avons pas réussi à trouver une méthode permettant d'exprimer exactement chacun des coefficients A_n . Cependant, si on se contente d'une solution approchée, le problème peut être résolu de différentes manières.

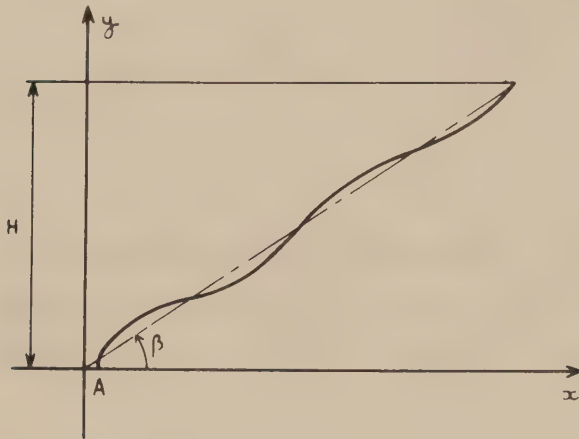
1) - On représente, sur l'intervalle $[0, \pi]$, chaque terme de la forme $(A_n \cdot \cos nu)$ par une série de sinus : $A_n \cdot \cos nu = A_n \sum_{k=1}^{k=\infty} q_k \cdot \sin ku$. En développant de la même manière le deuxième membre de l'équation (14') : $\frac{C_q \cdot \operatorname{tg} \beta}{2\pi^2} \cdot u^2 - \frac{u}{\pi} = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sinh nu$, on obtient par identification un système linéaire de n équations à n inconnues, n étant théoriquement infini.

Résoudre un tel système en donnant à n une valeur finie nous a paru hasardeux du fait qu'il existe une singularité pour $u = 0$. Aussi, nous avons renoncé à exploiter cette méthode.

2) - On divise le segment $]0, \pi]$ en k intervalles, qu'il n'est d'ailleurs pas nécessaire de choisir égaux entre eux, et on écrit que l'équation (14) est satisfaite aux points de division, l'origine étant exceptée. On obtient ainsi k équations linéaires qui permettent de calculer, de façon approchée, les valeurs des coefficients $A_0, A_1, A_2 \dots A_{k-1}$.

La précision ainsi obtenue est assez médiocre, même si on donne à k une valeur très grande, $k = 20$ par exemple ; la solution donnée par cette méthode correspond à une digue dont le parement AD ne serait plus une droite, mais une courbe dont l'allu-

re est représentée sur la Fig. 8. Pour obtenir une meilleure précision, sans augmenter exagérément k , on a deux possibilités :



- resserrer les points de division au voisinage de l'origine,

- chercher à représenter le plus fidèlement possible la singularité au point A'(1).

C'est cette deuxième solution que nous avons retenue, en définitive.

Fig. 8

L'écoulement du plan ξ , caractérisé par les conditions aux limites indiquées sur la Fig. 5 se comporte, au voisinage du point A' comme l'écoulement :

$$\frac{z}{H} = \left(\frac{\xi}{q}\right)^p \cdot \left[\mu_0 + \mu_1 \left(\frac{\xi}{q}\right)^2 + \mu_2 \left(\frac{\xi}{q}\right)^4 + \dots + \mu_k \left(\frac{\xi}{q}\right)^{2k} \dots \right] \quad (15)$$

avec

$$p = \frac{2\rho}{\pi} \quad (16)$$

$\mu_0, \mu_1, \mu_2 \dots \mu_k$ étant des coefficients adimensionnels, réels, inconnus, à priori.

Sur A' D' la fonction ξ prend la valeur $i\psi$, sachant que $\left(\frac{\xi}{q}\right)^p = e^{i\beta} \left(\frac{\psi}{q}\right)^p$, on a en particulier :

$$\frac{x}{H} = \cos \beta \left(\frac{\psi}{q}\right)^p \cdot \left[\mu_0 - \mu_1 \left(\frac{\psi}{q}\right)^2 + \mu_2 \left(\frac{\psi}{q}\right)^4 \dots + (-1)^k \mu_k \left(\frac{\psi}{q}\right)^{2k} \right],$$

et par suite :

$$\frac{x_2}{H} = \cos \beta \left(\frac{\psi}{q}\right)^p \cdot \left[\mu_0 - \mu_1 \left(\frac{\psi}{q}\right)^2 + \mu_2 \left(\frac{\psi}{q}\right)^4 \dots + (-1)^k \mu_k \left(\frac{\psi}{q}\right)^{2k} \right] - \frac{C_q}{2} \left(\frac{\psi}{q}\right)^p$$

Comme les coefficients μ_k sont indéterminés, nous écrirons plus simplement :

$$\frac{x_2}{H} = \left(\frac{\psi}{q}\right)^p \cdot \left[M_0 + M_1 \left(\frac{\psi}{q}\right)^2 + M_2 \left(\frac{\psi}{q}\right)^4 \dots + M_k \left(\frac{\psi}{q}\right)^{2k} \right] - \frac{C_q}{2} \left(\frac{\psi}{q}\right)^p \quad (17)$$

- (1) Cette manière d'opérer est identique à celle que l'on utilise lorsqu'on a recours à un réseau de résistances électriques pour résoudre de tels problèmes : les conditions aux limites sont satisfaites aux noeuds du réseau et les éventuelles singularités sont représentées par une loi particulière.

avec :

$$M_k = (-1)^k \mu_k \cdot \cos \beta \quad (18)$$

Mais, d'après l'équation (6) nous avons aussi sur A' D' :

$$\frac{x_2}{H} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot \cos(n \pi \frac{\psi}{q}) \quad (19)$$

Remplaçons dans la formule (17), chaque fonction $(\frac{\psi}{q})^{2k+p}$ par son développement en série de Fourier de la forme :

$$(\frac{\psi}{q})^{2k+p} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^k \cos n u \quad du \quad (20)$$

avec :

$$B_n^k = 2 \int_0^1 u^{p+2k} \cos n u \quad du \quad (21)$$

Nous pouvons identifier les deux expressions (19) et (20). Les coefficients A_n s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{C_q}{6} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{p+1+2k} \\ A_n = (-1)^{n+1} \frac{2 C_q}{n^2 \pi^2} + \sum_{k=0}^{k=\infty} B_n^k \cdot M_k \end{array} \right. \quad (22)$$

L'expression de $\frac{y_2}{H}$ sur le côté A' D', tirée de l'expression (6), est :

$$\frac{y_2}{H} = - \sum_{h=1}^{h=\infty} A_n \cdot \operatorname{th} \frac{n \pi}{C_q} \sin(n \pi \frac{\psi}{q}),$$

soit, après avoir explicité les coefficients A_n :

$$\frac{y_2}{H} = \frac{2 C_q}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \operatorname{th} \frac{n \pi}{C_q} \sin(n \pi \frac{\psi}{q}) - \sum_{k=0}^{k=\infty} [M_k \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n^k \operatorname{th} \frac{n \pi}{C_q} \sin(n \pi \frac{\psi}{q})] \quad (23)$$

En remplaçant, dans l'équation (6) $\frac{x_2}{H}$ et $\frac{y_2}{H}$ par leurs expressions (17) et (23), il vient :

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} M_k \cdot [(\frac{\psi}{q})^{p+2k} \cdot \operatorname{tg} \beta + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n^k \cdot \operatorname{th} \frac{n \pi}{C_q} \cdot \sin(n \pi \frac{\psi}{q})] = \frac{\psi}{q} + \frac{2 C_q}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \operatorname{th} \frac{n \pi}{C_q} \sin(n \pi \frac{\psi}{q}),$$

soit, en posant $\frac{\psi}{q} = v$, avec $0 \leq v \leq 1$:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} M_k [v^{p+2k} \operatorname{tg}^p + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \operatorname{th} \frac{n \pi}{C_q} \sin(n \pi v)] = v + \frac{2 C_q}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{th} \frac{n \pi}{C_q} \sin(n \pi v) \quad (24)$$

Pour déterminer les coefficients inconnus $M_0, M_1 \dots M_k$, nous diviserons le segment $[0, 1]$ en $k + 1$ intervalles égaux et nous écrirons que l'équation ci-dessus est satisfaite aux points d'abscisses : $v = \frac{1}{k+1}, \frac{2}{k+1}, \dots, 1$; en particulier, pour $v = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} M_k = \frac{1}{\operatorname{tg}^p} \quad (25)$$

Lorsque ces coefficients M_k auront été déterminés, on en déduira immédiatement les coefficients A_n en utilisant les formules (22) ; la solution du problème sera alors donnée par l'équation :

$$\frac{z}{H} = \frac{\xi}{q} - \frac{C_q}{2} \cdot \left(\frac{\xi}{q} \right)^2 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{\operatorname{ch} \left(\frac{n \pi}{C_q} \right)} \cdot \operatorname{ch} \left[n \pi \left(\frac{\xi}{q} - \frac{1}{C_q} \right) \right] \quad (26)$$

La seule difficulté de la méthode réside dans le calcul des coefficients B_n^0 . En effet, une fois ceux-ci déterminés, on en déduit aisément tous les autres par la formule de récurrence :

$$B_n^k = \frac{2}{n \pi} (p + 2k) \cdot \left[(-1)^n - \frac{p-1+2k}{2} \cdot B_n^{k-1} \right] \quad (27)$$

Les coefficients B_n^0 sont donnés par la relation :

$$B_n^0 = -2p \left[\frac{1}{1+p} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1+p} \cdot \frac{(n \pi)^{2s}}{(2s+1)!} \right] \quad (28)$$

qui n'est susceptible de fournir des résultats suffisamment précis que si n est petit ; aussi, nous n'avons utilisé cette relation que pour calculer les deux premiers coefficients B_1^0 et B_2^0 . Pour $n > 2$, nous avons eu recours à la formule de récurrence :

$$B_{n+1}^0 = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{p+1} \cdot \left\{ B_n^0 + (-1)^{n+1} \frac{2p}{n \pi} \cdot \left[a_0 + a_1 \frac{1-p}{n} + a_2 \frac{(1-p)(2-p)}{n^2} + \dots + a_s \frac{(1-p)(2-p) \dots (s-p)}{n^s} \right] \right\} \quad (29)$$

avec :

$$a_0 = 2 ; a_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \dots ; a_{2m} = (-1)^m \frac{2}{\pi 2^m} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} \frac{(-1)^\lambda}{\pi 2^\lambda} \cdot \frac{1}{(2m-2\lambda)!} \quad (29')$$

$$a_1 = -1 ; a_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} \dots ; a_{2m+1} = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \frac{(-1)^\lambda}{\pi 2^\lambda} \cdot \frac{1}{(2m+1-2\lambda)!} \quad (29'')$$

Il est possible d'établir une relation supplémentaire entre les coefficients M_k , indépendamment des considérations précédentes. Pour cela, nous mettrons à profit le fait que l'on connaît la vitesse $\vec{V}$ de l'écoulement au point de raccordement D de la ligne d'eau et du parement amont, soit :

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} u = A \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \\ v = -A \cdot \cos^2 \beta \end{array} \right.$$

On en déduit la vitesse complexe :

$$w_D = u - i v = A \cos \beta \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}$$

et, par suite, la dérivée $\frac{dz}{d\xi}$ au point D :

$$\left(\frac{dz}{d\xi} \right)_D = \frac{1}{w_D} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot e^{-i \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}$$

Mais, d'après l'équation (15), on a aussi :

$$\left(\frac{dz}{d\xi} \right)_D = \frac{H}{q} \cdot \frac{e^{-i \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}}{\cos \beta} \sum_{k=0}^{k=\infty} (p + 2k) \cdot M_k$$

On obtient alors, par identification :

$$C_q = p \sum_{k=0}^{k=\infty} M_k + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} k \cdot M_k$$

soit, compte tenu de la relation (25)

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} k M_k = \frac{C_q}{2} - \frac{\beta}{\pi \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (30)$$

Nous n'avons pas introduit cette relation dans le système d'équations permettant le calcul des coefficients M_k ; elle nous a seulement servi de vérification.

Pour obtenir une précision relative de 10^{-4} sur les valeurs des longueurs L et ℓ , il suffit de limiter au terme de rang quatre, le développement du polynôme figurant dans le second membre de l'équation (15).

4,5 - RESULTATS -

Le tableau ci-après donne les valeurs de L et ℓ en fonction de l'angle de

talus β et du coefficient de débit C_q . Nous avons également dressé un abaque permettant de déterminer, par interpolation, les valeurs de L qui correspondent à des valeurs quelconques de β et de C_q (Fig. 9).

Les valeurs de ℓ sont sensiblement égales à $\frac{C_q}{2}$, quel que soit β (Fig. 10).

Sur la Fig. 11, nous avons représenté le réseau des lignes de courant et des lignes équipotentielles dans le cas où l'angle β est égal à $\frac{\pi}{4}$, le coefficient de débit C_q étant égal à 0,5.

Enfin, les Fig. 12, 13 et 14 donnent la configuration des lignes d'eau correspondant à $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{\pi}{3}$, pour différentes valeurs de C_q .

4,6 - FORMULES APPROCHEES -

Si on limite le développement du polynôme de l'équation (15) au terme de rang 2, les coefficients M_0 , M_1 se calculent immédiatement à partir des relations (25) et (29).

On obtient ainsi :

$$M_0 = -\frac{C_q}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\pi}\right) ;$$

$$M_1 = \frac{C_q}{2} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{\beta}{\pi}$$

En supposant encore que C_q est suffisamment petit pour que les termes de la forme $\frac{A_n}{\frac{n}{\pi} \operatorname{ch} \frac{C_q}{2}}$ soient négligeables, il vient alors, d'après les relations (22)

et (26) :

$$L \approx \frac{1}{2C_q} - \frac{C_q}{6} \cdot \left[1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{\beta}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2\beta}{3\pi}\right)}\right] + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{1 + \frac{4\beta}{3\pi}}{\left(1 + \frac{\beta}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2\beta}{3\pi}\right)} \quad (31)$$

$$\ell \approx \frac{C_q}{2} \quad (32)$$

ÉCOULEMENT A TRAVERS UNE DIGUE EN TERRE A PAREMENTS INCLINÉS

	$\beta = \pi/6$		$\beta = \pi/4$		$\beta = \pi/3$		$\beta = \pi/2$	
	$\frac{L}{H}$	$\frac{l}{H}$	$\frac{L}{H}$	$\frac{l}{H}$	$\frac{L}{H}$	$\frac{l}{H}$	$\frac{L}{H}$	$\frac{l}{H}$
C_q	0,15	4,670	0,075	0,075	3,668	0,075	3,308	0,075
	0,20	3,818	0,100	0,100	2,822	0,100	2,466	0,100
	0,25	3,301	0,125	0,125	2,310	0,125	1,967	0,125
	0,30	2,950	0,150	0,150	1,964	0,150	1,673	0,150
	0,35	2,695	0,175	0,175	1,714	0,175	1,400	0,175
	0,40	2,498	0,200	0,200	1,523	0,200	1,226	0,200
	0,45	2,341	0,226	0,226	1,372	0,225	1,086	0,225
	0,50	2,212	0,252	0,252	1,248	0,251	0,967	0,250
	0,60	2,009	0,307	0,304	1,057	0,302	0,772	0,299
	0,70	1,851	0,365	0,358	0,912	0,353	0,625	0,342
	0,80	1,722	0,423	0,413	0,798	0,404	0,521	0,385
	0,90	1,612	0,485	0,468	0,704	0,453	0,440	0,425
	1,00	1,515	0,546	0,522	0,625	0,501	0,363	0,463

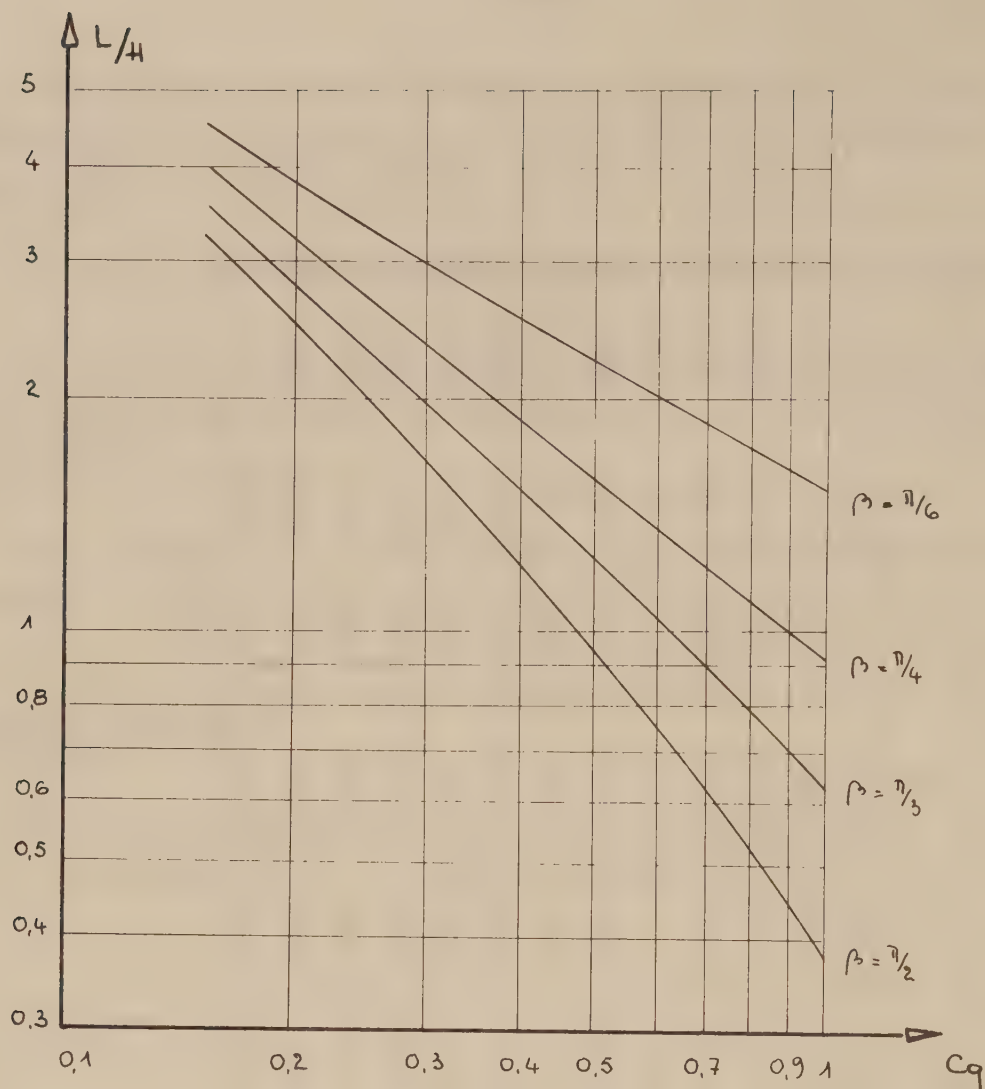


Fig. 9

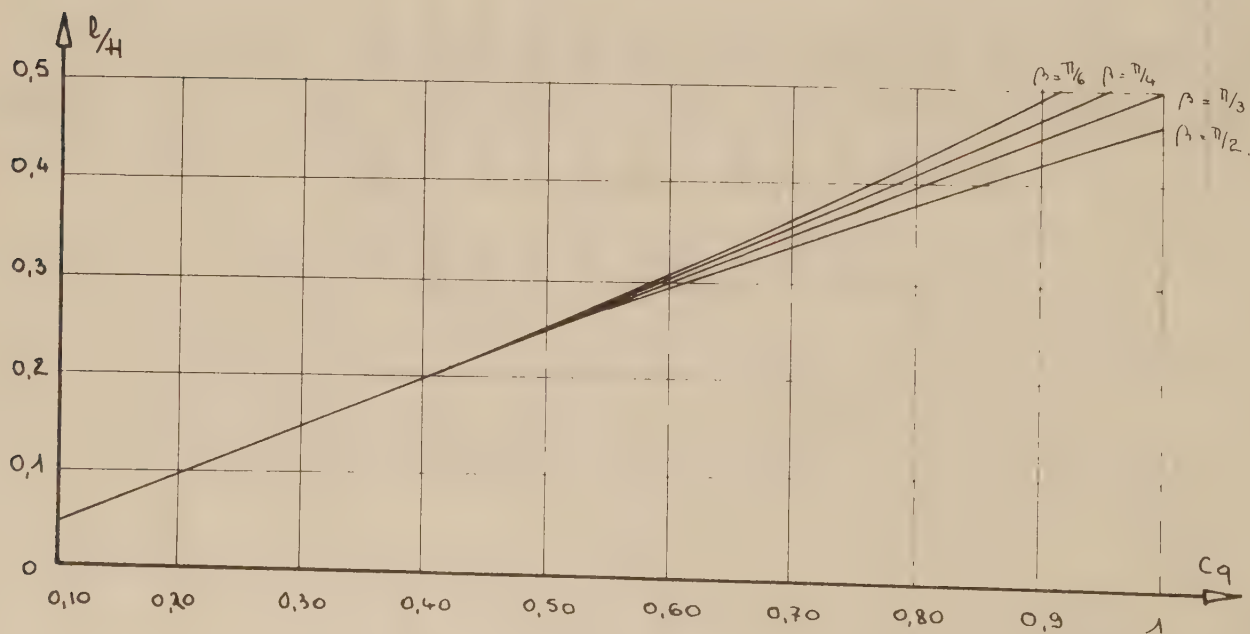


Fig. 10

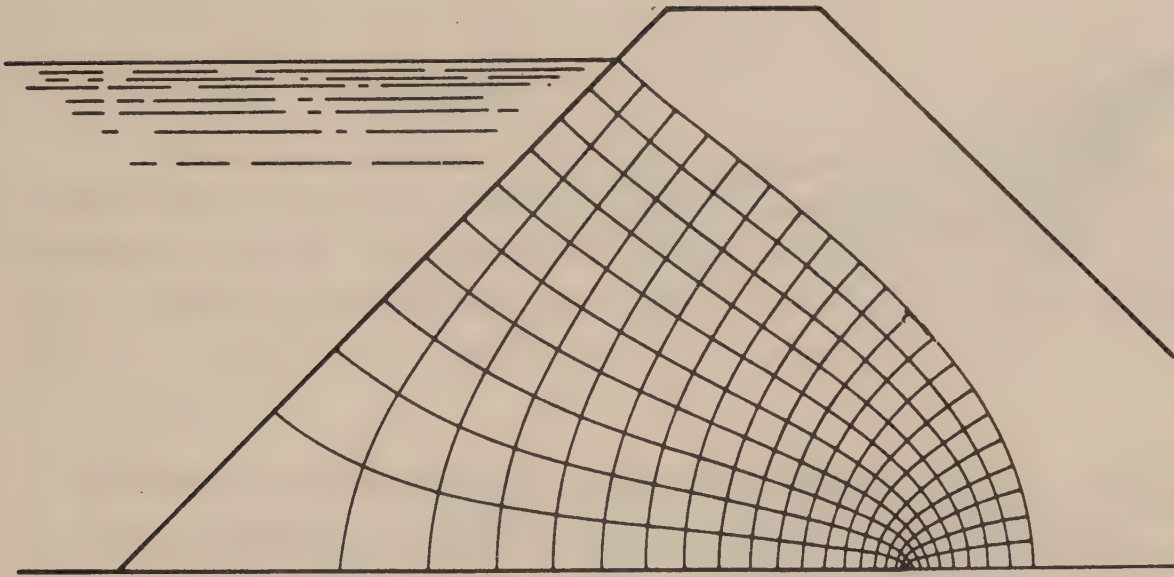


Fig. 11

$$\beta = \frac{\pi}{6}$$

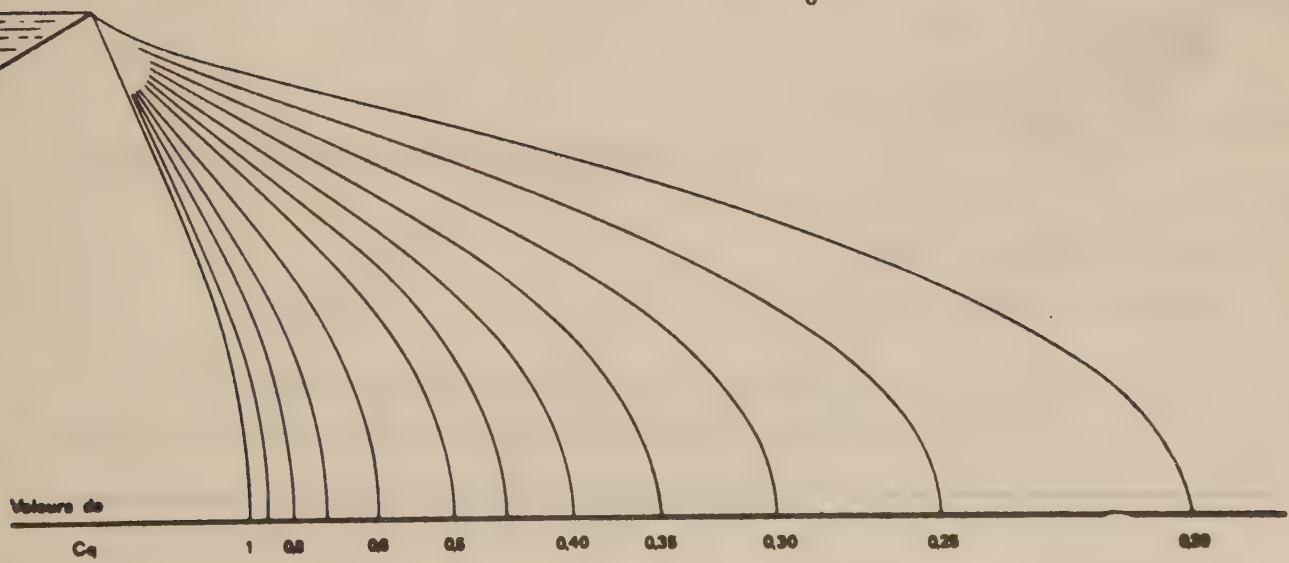


Fig. 12

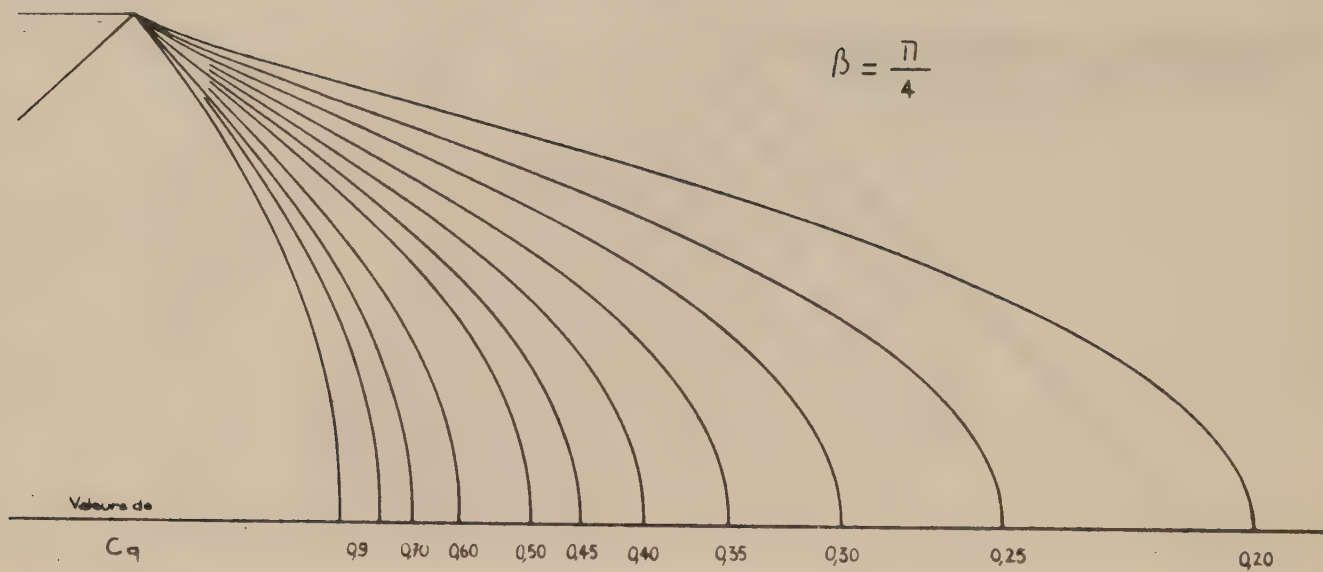


Fig. 13

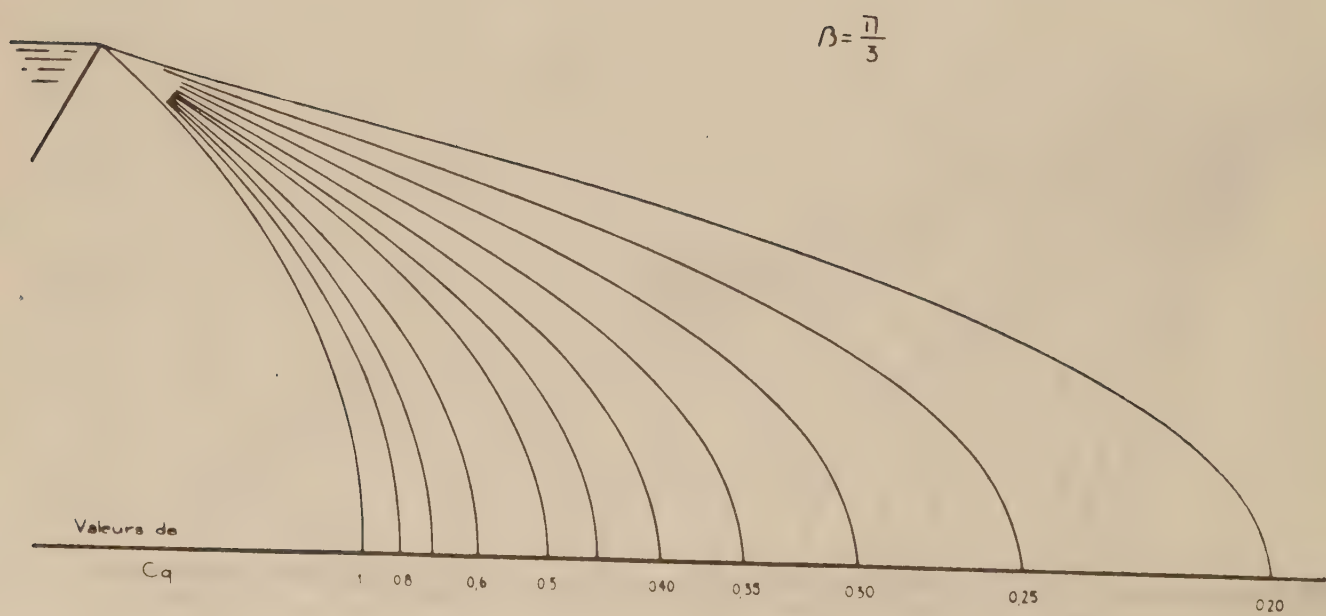


Fig. 14

A N N E X E

Dans le but de faire une synthèse de toutes nos études sur les écoulements d'infiltration, nous avons inclus en annexe les résultats relatifs à deux écoulements précédemment étudiés. Nous donnerons seulement les résultats, les développements des calculs ayant déjà fait l'objet d'une partie de notre Diplôme d'Etudes Approfondies (Nantes).

1 - ÉCOULEMENT PLAN SOUS UN RIDEAU DE PALPLANCHES ENFONCEES DANS UNE COUCHE DE TERRAIN PERMEABLE, HORIZONTALE, INDEFINIE, PRESENTANT UN DECROCHEMENT -

La représentation de l'écoulement dans le plan physique (z), normal aux palplanches, est donnée par la Fig. 1.

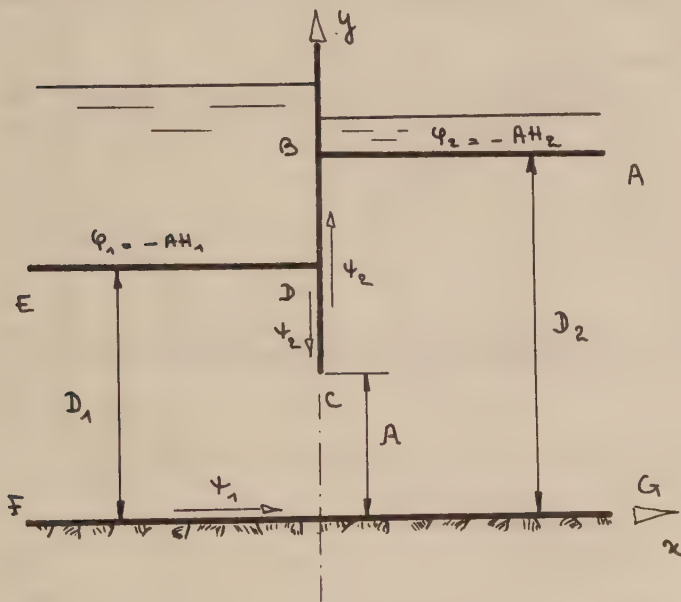


Fig. 1

Nous appelons :

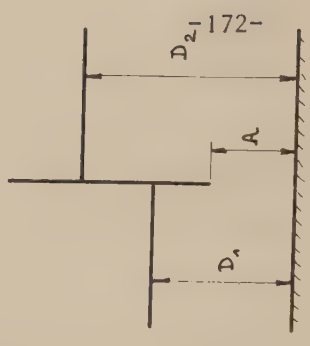
- D_2 la hauteur de la couche de terrain perméable à l'aval du rideau de palplanches,
- D_1 la hauteur de la couche de terrain perméable à l'amont du rideau de palplanches,
- A la hauteur de la fenêtre,
- H_1 et H_2 les côtés des plans d'eau à l'amont et à l'aval du rideau de palplanches.

Les conditions aux limites de l'écoulement dans le domaine (τ) sont : deux lignes de courant ψ_1 et ψ_2 et deux lignes équipotentiellles $\phi_1 = -AH_1$ et $\phi_2 = -AH_2$.

Posons :

$$m = \frac{D_1}{D_2} \quad \text{et} \quad a = \frac{A}{D_2}$$

Rides de
poliplanchés.



$$a = \frac{A}{D_2}$$

$$m = \frac{D_1}{D_2}$$

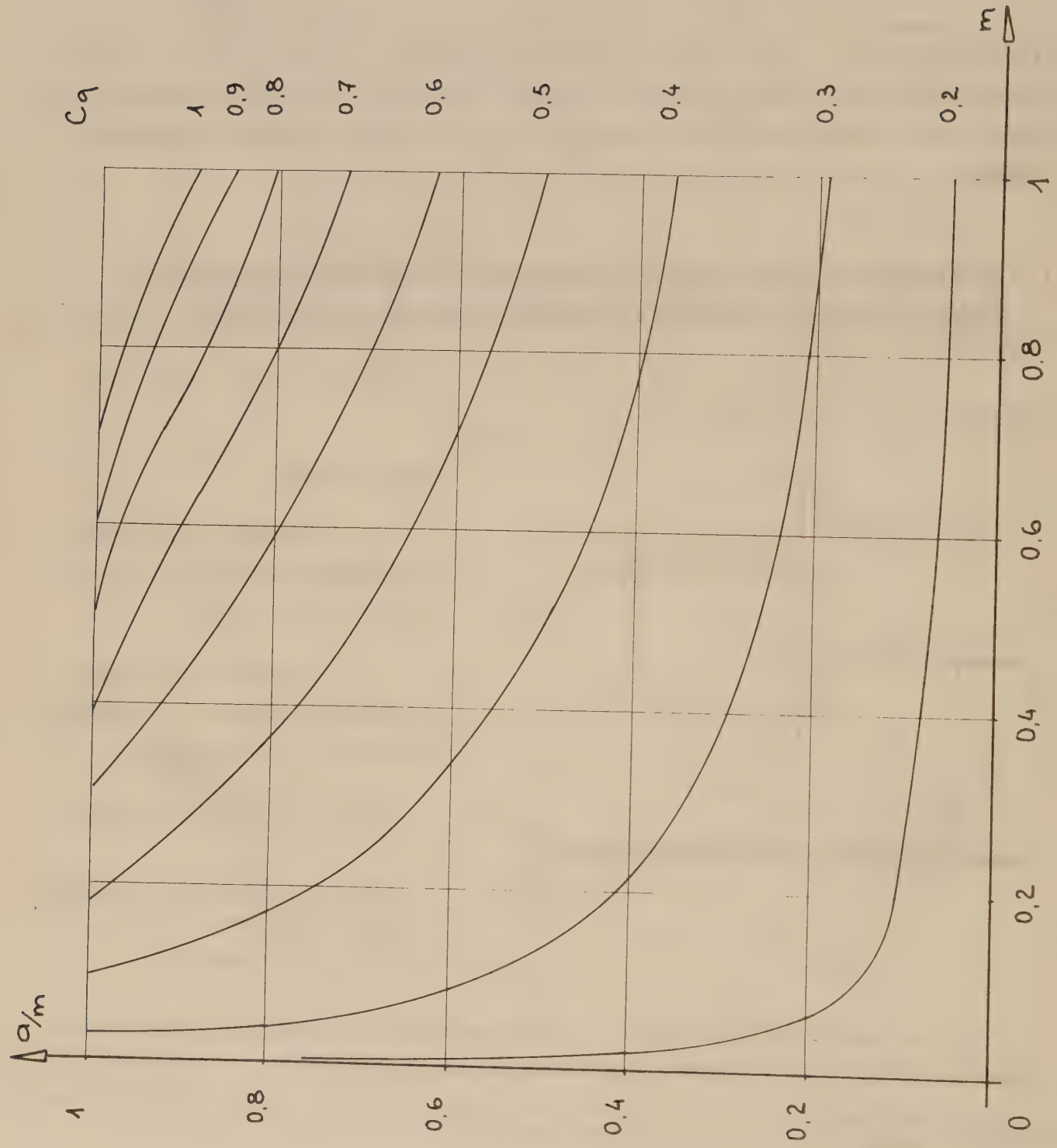


fig 2

- $L = AB$ la distance horizontale séparant le filtre du parement amont de la digue.

Les conditions aux limites de l'écoulement sont : une ligne de courant $\psi_1 = 0$ sur le côté AB, une ligne équipotentielle $\phi_2 = -AH_2$ sur le côté BC, une ligne de courant $\psi_2 = q$ le long de laquelle le potentiel ϕ est relié à la cote y par la relation $\phi = -Ay$ sur le côté DC, et une ligne équipotentielle $\phi_1 = -AH_1$ sur le côté DA.

Pour un coefficient de débit

$$Cq = \frac{K'}{K}$$

la hauteur H_2 du drain est donnée par l'expression :

$$\frac{H_2}{H_1 - H_2} = Cq \cdot \operatorname{tg} \beta \left\{ 1 - \frac{J_1(K'; k')}{I_1(K'; k')} \right\}$$

avec :

$$I_1(u' | k') = \int_0^{u'} \left[\frac{\operatorname{sn}(K' - \sigma | k')}{\operatorname{sn}(\sigma | k')} \right]^m \cdot \left[\frac{\operatorname{dn}^2(\sigma | k')}{k'^2} - \mu_1 \right] d\sigma$$

$$J_1(u' | k') = \frac{1}{K'} \cdot \int_0^{u'} \left[\frac{\operatorname{sn}(K' - \sigma | k')}{\operatorname{sn}(\sigma | k')} \right]^m \cdot \left[\frac{\operatorname{dn}^2(\sigma | k')}{k'^2} - \mu_1 \right] \sigma \cdot d\sigma$$

et

$$\mu = \frac{\int_0^K \left[\frac{\operatorname{sn}(K - \sigma | k)}{\operatorname{sn}(\sigma | k)} \right]^m \cdot \operatorname{sn}^2(\sigma | k) \cdot d\sigma}{\int_0^K \left[\frac{\operatorname{sn}(K - \sigma | k)}{\operatorname{sn}(\sigma | k)} \right]^m d\sigma}$$

Les équations paramétriques de la ligne d'eau sont :

$$\begin{cases} \frac{x - x_D}{H_1 - H_2} = \operatorname{tg} \beta \left[\frac{H_1 - y}{H_1 - H_2} + \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{u I_2(u | k) - K \cdot J_2(u | k)}{K \cdot I_1(K' | k')} \right] \\ \frac{H_1 - y}{H_1 - H_2} = \frac{u}{K} \end{cases}$$

avec

$$I_2(u | k) = \int_0^u \left[\frac{\operatorname{sn}(K - \sigma | k)}{\operatorname{sn}(\sigma | k)} \right]^m \cdot [\mu_1 - \operatorname{sn}^2(\sigma | k)] \cdot d\sigma$$

$$J_2(u | k) = \frac{1}{K} \int_0^u \left[\frac{\operatorname{sn}(K - \sigma | k)}{\operatorname{sn}(\sigma | k)} \right]^m \cdot [\mu_1 - \operatorname{sn}^2(\sigma | k)] \cdot \sigma \cdot d\sigma$$

Enfin, la longueur L s'exprime par :

$$\frac{L}{H_1 - H_2} = \frac{1}{\cos \beta} \cdot \left[\frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{J_2(K | k)}{I_1(K' | k')} \right]$$

Les résultats numériques sont consignés dans le Tableau 1. L'abaque de la Fig. 4 représente les lignes d'eau d'un écoulement à travers une digue de pente de talus égal à 1/1.

	TALUS I/1		TALUS 2/3		TALUS I/2		TALUS I/3		TALUS I/4	
	$x_C - x_B$	$x_D - x_C$	$x_C - x_B$	$x_D - x_C$	$x_C - x_B$	$x_D - x_C$	$x_C - x_B$	$x_D - x_C$	$x_C - x_B$	$x_D - x_C$
c_q	$H_I - H_2$	$H_I - H_2$	$H_I - H_2$	$H_I - H_2$	$H_I - H_2$	$H_I - H_2$	$H_I - H_2$	$H_I - H_2$	$H_I - H_2$	$H_I - H_2$
0,10	0,072	7,952	0,066	7,300	0,063	6,978	0,059	6,615	0,057	6,430
0,15	0,108	4,631	0,099	4,027	0,094	3,740	0,089	3,424	0,085	3,266
0,20	0,144	3,305	0,132	2,781	0,125	2,538	0,118	2,275	0,114	2,144
0,25	0,180	2,627	0,165	2,165	0,157	1,953	0,147	1,727	0,142	1,617
0,30	0,216	2,228	0,198	1,808	0,188	1,618	0,177	1,418	0,170	1,320
0,35	0,252	1,968	0,231	1,578	0,219	1,404	0,206	1,220	0,199	1,131
0,40	0,288	1,786	0,265	1,418	0,252	1,254	0,236	1,082	0,227	0,998
0,45	0,325	1,653	0,298	1,299	0,284	1,143	0,266	0,979	0,257	0,899
0,50	0,352	1,550	0,333	1,207	0,316	1,056	0,297	0,897	0,287	0,820
0,55	0,399	1,469	0,367	1,133	0,350	0,985	0,329	0,830	0,318	0,755
0,60	0,437	1,402	0,403	1,072	0,384	0,926	0,361	0,774	0,349	0,699
0,65	0,475	1,348	0,439	1,021	0,418	0,876	0,395	0,725	0,382	0,651
0,70	0,515	1,302	0,476	0,977	0,454	0,833	0,429	0,682	0,415	0,608
0,75	0,554	1,263	0,513	0,939	0,491	0,795	0,465	0,644	0,450	0,570
0,80	0,595	1,229	0,552	0,905	0,529	0,762	0,501	0,611	0,486	0,537
0,85	0,636	1,201	0,591	0,877	0,567	0,733	0,538	0,581	0,523	0,507
0,90	0,677	1,176	0,631	0,851	0,606	0,707	0,577	0,555	0,561	0,480
0,95	0,719	1,155	0,672	0,828	0,646	0,684	0,616	0,531	0,600	0,455
1,00	0,763	1,136	0,714	0,809	0,687	0,664	0,656	0,510	0,640	0,434

Ligne d'eau d'un écoulement à travers
une digue en terre munie d'un drain de pied
Pente du talus 1/1

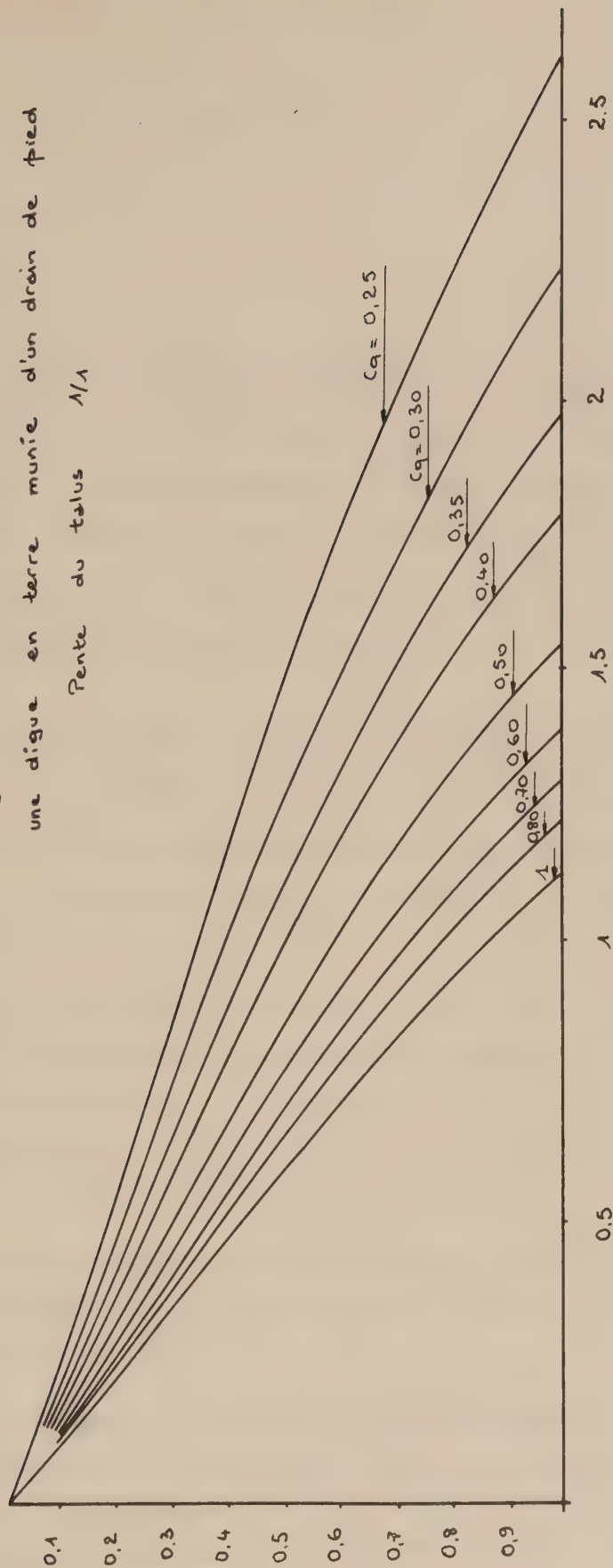


fig : 4.

CONCLUSION

-:-:-

La méthode des transformations analytiques nous a permis de résoudre toute une série de problèmes d'écoulements d'infiltration. Son intérêt réside dans le fait qu'elle permet d'obtenir la solution exacte du problème ; par contre, elle donne généralement lieu à des calculs laborieux : en effet, la fonction de potentiel complexe caractérisant l'écoulement dans le plan physique est donnée par une ou plusieurs quadratures. Si cette méthode s'impose pour résoudre des cas simples, elle ne semble pas être adaptée à la résolution des problèmes plus complexes ; nous lui préférons la méthode des solutions particulières.

C'est le cas par exemple, de tous les écoulements présentant une surface libre sans suintement ; l'image du domaine de l'écoulement dans le plan $(\phi; \psi)$ est un rectangle. La résolution dans ce plan peut se faire par la méthode des différences finies : l'équation aux dérivées partielles est remplacée par une relation approchée, écrite pour chacun des n noeuds d'un quadrillage du domaine. La solution est alors obtenue en résolvant le système de n équations ainsi obtenues. Pour obtenir une précision satisfaisante, on est amené à utiliser un quadrillage très fin, de sorte que le rang du système peut devenir très élevé. Dans tous les cas où cela est possible, il est préférable de résoudre le problème dans le plan ξ par la méthode des solutions particulières ; on s'impose une solution sous la forme d'une fonction à variables séparées, et développable en série de FOURIER ; cette solution est ajustée de manière à satisfaire les conditions aux limites sur le contour du domaine.

Le résultat ne sera qu'une approximation de la vraie valeur, mais l'erreur sera d'autant plus faible que l'étude particulière des singularités existant dans le plan $(\phi; \psi)$ sera plus soignée.

Cette dernière méthode reste donc un moyen puissant et précis de résolution de problèmes d'écoulements d'infiltration ; elle doit permettre de traiter encore de nombreux modèles d'écoulements. Citons par exemple celui d'un écoulement à travers une digue munie d'un drain de pied mais dont les angles des parements sont différents.

B I B L I O G R A P H I E

-:-:-

FONCTIONS ELLIPTIQUES -

- APPEL et LACOUR - Fonctions elliptiques - Gauthier Villars 1922.
BATEMAN - Manuscript Project - Higher Transcendental Functions
Tome II p. 294 à 383
Mac Graw Hill 1953.
COBLE - Algebraic Geometry and Theta Functions.
R. COURANT et D. HILBERT - Methode of Mathematical Physics Vol II.
R. DELTHEIL - Techniques mathématiques de la physique Tome I.
HANCOCK.H - Elliptic Integrals - Dover Publications - New York 1927.
E. HILLE - Analytic Function Theory Vol. II p. 124 à 181 London 1962.
JAHNKE-EMDE-LOSH - Tables of Higher Functions - Stuttgart - 1960.
J.LEGRAS - Technique de résolution des équations aux dérivées partielles
Dunod 1956.
MAHADEV DUTTA and LOKENATH DEBNATH - Elements of Theory of Elliptic and
Associated Functions with Applications
Calcutta 1965.
MILNE THOMSON - Jacobian Elliptic Functions - Dover Publications
New York 1950.
G.W. and R.M. SPENCELEY - Smithsonian Elliptic Functions Tables
Washington 1947.
G. VALIRON - Théorie des fonctions p. 462 à 489 - Masson Editeur 1966.
WHITTAKER and WATSON - Modern Analysis - Cambridge 1927.

HYDRAULIQUE SOUTERRAINE -

- S.T.T. GHEORGITA - Metode Matematice in Hidrogazodinamica Subterana
Bucaresti 1966.
P. GUEVEL - Contribution à l'étude théorique des écoulement d'infiltration
Thèse Toulouse 1964.
P. HUARD de la MARRE - Résolution de problèmes d'infiltration à surface
libre au moyen d'analogies électriques.
Publications scientifiques et techniques
du Ministère de l'Air 1958.
C. JAEGER - Hydraulique technique - Dunod.
C. MALLET, PACQUANT - Les barrages en terre - Eyrolles 1951.
C. MATEESCU - Hydraulica.Bucaresti 1963.
PIETRARU - Studii de Geotechnica Fundatii si Constructii Hidrotechnice.
Stabilitatea Digurilor la Infiltratii.
C. THIRRIOT, EFTHIMIATOS - C.R.A.S. Tome 262, série A,
Séance du 10 janvier 1966.
La Houille Blanche n° 7/1966 p. 803.

